

La base de orientación, una herramienta para ayudar al alumnado a resolver problemas

Joana Villalonga Pons; Jordi Deulofeu Piquet

e-mail: juanamaria.villalonga@e-campus.uab.cat; jordi.deulofeu@uab.cat

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)
Bellaterra, Cerdanyola del Vallès – Barcelona

RESUMEN

Resolver problemas es una competencia básica y fundamental, dentro de la competencia matemática, que nuestros alumnos deberían alcanzar al finalizar su escolarización obligatoria. Así mismo, de manera generalizada, las experimentaciones demuestran que adquirir esta competencia resulta una difícil y ardua tarea para la mayoría de ellos. Ante tal situación, nos preguntamos cómo deberían ser las actividades de guía y de trabajo (y, en consecuencia, de evaluación) que permitan mejorar la adquisición de dicha competencia. Para afrontar dicha problemática, proponemos el uso de una base de orientación asociada a un problema concreto. La experiencia que en este artículo se presenta nos permite mostrar la efectividad de dicha práctica.

Competencia matemática, Resolución de problemas, Bases de orientación

La resolución de problemas

Dentro del quehacer matemático, la resolución de problemas destaca por ser una de las actividades matemáticas más genuinas, y en la que se ponen en juego y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la propia matemática. No es de extrañar, pues, que como apunta Voskoglou [20], se trate de un componente principal de la educación matemática desde el momento en que dicha actividad ha emergido como una ciencia autosuficiente.

Para Niss [10], un problema matemático (formulado) es un tipo muy especial de pregunta matemática que para resolverse requiere, de manera indispensable, un proceso de investigación matemática. Dicho autor puntualiza, además, que la noción de “problema matemático” no es absoluta, si no relativa a la persona que se enfrenta al problema, ya que lo que puede ser una tarea rutinaria para una persona puede resultar una tarea de investigación para otra, y viceversa. Esta idea da sentido al comentario del documento sobre el desarrollo competencial del ámbito matemático asociado al currículum del sistema catalán [5] cuando se dice que un problema se tiene que entender como una propuesta de enfrentamiento ante una situación desconocida que se plantea a través de un conjunto de datos dentro de un contexto, para la cual, en principio, no se dispone de ninguna respuesta inmediata, si no que requiere reflexionar, tomar decisiones y diseñar estrategias. Es evidente, pues, tal como ya expuso Schoenfeld [16], distinguir adecuadamente entre un problema (en sentido matemático) en el que, a priori, se desconoce cómo resolverlo, y un ejercicio, en el que se tiene una tarea sin sorpresas, es decir, que puede ser resuelta de manera familiar o rutinaria, mediante la aplicación de técnicas o algoritmos, más o menos complicados, pero automatizados. Un problema matemático, en definitiva, debe invitar siempre a la indagación y, en su resolución, debe haber una chispa de descubrimiento que permita experimentar el encanto y la satisfacción de lograr su solución ([6], [7]).

Como bien se establece en los documentos *Competències bàsiques en l'àmbit de matemàtiques del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya* [6], [7], en el proceso de resolución de un problema intervienen, aunque no necesariamente deban desarrollarse en un orden determinado, diferentes etapas (en la obra de Mason et. al. [9] por ejemplo, donde se pretende mostrar cómo atacar cualquier problema de una manera eficaz, así como ir aprendiendo de la experiencia, se puede encontrar un buen análisis de estas posibles etapas), entre las cuales también se pueden identificar herramientas que pueden ayudar a entender mejor el problema propuesto además de encontrar pinceladas propias de otras competencias vinculadas a las matemáticas, que deben también de saberse identificar y desglosar.

No hay duda alguna, pues, que resolver un problema es una práctica compleja y difícil de abordar. De ahí, seguramente, se explica el hecho de que sea una de las actividades matemáticas más estudiadas. Voskoglou [20] recuerda que si bien los primeros trabajos en relación a la resolución de problemas iban dirigidos a describir los procesos necesarios para resolver un problema, los estudios actuales se han centrado en la identificación de los atributos de quién resuelve los problemas, que contribuyen a su éxito. Estos estudios más recientes identifican la planificación y el monitoraje, la guía y el acompañamiento como factores clave en el éxito de la resolución de problemas, a la vez que han puesto de manifiesto la influencia de otras dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones [17], [20]. De hecho, actualmente, hay la creencia generalizada de que la dificultad en la resolución de problemas no es tanto por la función multivariable que supone la tarea de resolver un de problemas sino de quien resuelve el problema, es decir, del propio “resolutor” [20].

Para Schoenfeld [18] resolver un problema, como otras actividades humanas, es un ejemplo de comportamiento dirigido hacia un objetivo, con lo que el proceso de resolver un problema se trata de un objetivo orientado a una actividad dinámica. Según Schoenfeld [18], esta actividad puede ser explicada y modelada por una arquitectura teórica basada en cuatro aspectos: el conocimiento, los objetivos, las orientaciones y la toma de decisiones, pues aunque el conocimiento es la base de todo comportamiento competente, lo más importante es la manera en cómo éste se organiza y se accede a él. Sólo una vez entendidas las orientaciones de un individuo, seremos capaces de ver cómo uno prioriza objetivos y resultados y, por lo tanto, cómo modelar las posibles líneas de la acción. Es imprescindible, pues, disponer de la comprensión de “cómo funcionan las cosas” para ayudar a mejorar la práctica.

Ante el hecho, pues, de que las orientaciones y necesidades de cada alumno suelen ser diferentes, conducir adecuadamente su aprendizaje implica adecuar las actividades a cada uno de ellos, lo que supone una dificultad adicional al profesorado que los guía en el proceso de resolución de un problema (y más si se tienen alrededor de 30 alumnos en una misma aula) [20].

El mismo Schoenfeld, en sus reflexiones del 2013 [19] y recordando su trabajo del 1992 [17], donde establece que, con las correctas directrices, los estudiantes pueden convertirse en “resolutores” de problemas más eficientes, apunta que el proceso de resolver un problema requiere de cuatro categorías, necesarias y suficientes, para poder analizar el nivel de éxito a la hora de resolver un problema. Según el autor, dichas categorías son:

- a) El conocimiento de uno mismo
- b) Las estrategias de resolución que uno posee, lo que serían las estrategias heurísticas
- c) El propio monitoraje y la autorregulación de uno mismo (aspecto metacognitivo)
- d) Las creencias y experiencias previas de uno mismo y ante cualquier aspecto de las matemáticas y la resolución de problemas.

La idea reflejada en c) la encontramos también en la obra de Mason et. al. [9], donde se dedica un capítulo entero a describir la necesidad e importancia del monitor interior durante la resolución de un problema. Para dar a entender este papel, describen la actividad de razonar como si se tuviera un agente independiente dentro de uno mismo que va aconsejando lo que se tiene que hacer, exactamente como si de un monitor se tratara. Este monitor debe actuar como un tutor personal que se auto vigila y se hace las preguntas oportunas a sí mismo, con la ventaja, pero, de ser estrictamente personal a los propios pensamientos y actos. Para ello, además, se especifica un listado de lo que puede hacer dicho monitor, entre las cuales destacamos:

1. Intentar la ejecución de un plan
2. Identificar las generalizaciones
3. Ir valorando las ideas que se vayan presentando sobre la marcha,
4. Darse cuenta de cuándo se presenta la situación de ATASCADO y hacer tal conciencia explícita, permitiendo así un cambio de actividad.
5. Sugerir, si es necesario, un regreso a la fase de abordaje.
6. Sugerir modificaciones en el plan de ataque.
7. Examinar críticamente los razonamientos
8. Revisar la resolución completa

La base de orientación

Ser competente en un determinado campo, tal y como expone Bolívar [2] no consiste en saber una cosa, si no en saberla aplicar, es decir, en saber resolver una situación compleja propia de dicha materia. En consecuencia, pues, y tal como apunta el mismo autor, en cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje por competencias, se requiere un modelo particular de evaluación que no se limite a constatar la posesión de recursos, si no su puesta en práctica de manera satisfactoria [1].

Para Niss [10], poseer una competencia matemática consiste en estar preparado y ser capaz de actuar matemáticamente sobre la base del conocimiento y la perspicacia que se tiene. Las acciones que así lo permiten pueden ser tanto de índole física, conductual como mental. Por lo tanto, una evaluación apropiada de ellas debe estar basada en la identificación de la presencia y el alcance de las mismas en relación a las actividades matemáticas en las que se ha participado. El hecho de que cualquier actividad matemática requiere de una o más competencias matemáticas, conlleva, de manera esencial, a identificar las competencias necesarias y suficientes que se ven involucradas en ella.

No hay duda alguna pues que, tal como apunta Sanmartí [14], el objetivo de cualquier proceso de enseñanza debe consistir en asegurar que el alumnado sea capaz, cuando se encuentre delante de un nuevo problema que exija aplicar conocimientos aprendidos, anticipar y planificar las operaciones necesarias para resolverlo, pues, tal como la misma autora ya comenta en su trabajo del 2002 [13], para resolver un problema (de cualquier índole) se requiere activar el reconocimiento de diferentes estrategias. Resulta indispensable, pues, antes de empezar una

tarea, prever los posibles caminos a seguir, sus etapas intermedias y sus posibles resultados para, en función de esta previsión, escoger uno de los caminos y decidir un orden en las operaciones necesarias para aplicarlo. Sin embargo, ante dicha práctica muchos alumnos manifiestan una gran inseguridad y no terminan ninguno de los procesos iniciados porque no son capaces de planificar el trabajo que se les pide ya que realizan las tareas aplicando diferentes formas de hacer o de razonar, sin mucha coherencia ni orden siguiendo un proceso algorítmico vacío [13]. En cambio, tal como se manifiesta en el mismo trabajo de Sanmartí aquellos que acostumbran a resolver adecuadamente los problemas son los que dedican mucho más tiempo en pensar y planificar la forma de resolución que en efectuar los cálculos. Con esta anticipación de la acción, además, se obtienen mejores resultados y se logra que la tarea resulte más gratificante [13].

En esta línea, Jiménez [8] ratifica dicho comportamiento cuando expone que, a diferencia de lo que algunas investigaciones han demostrado sobre los modelos mentales como base para el razonamiento y la resolución de problemas (Giudice y Galagovksy, 2008), en general, los estudiantes pocas veces expresan sus representaciones mentales. Ante ello, recuerda que sería importante capacitar el alumnado para que, usando formas de representación con las que pudiera describir y argumentar con coherencia sus actuaciones y objetivos, pudiera actuar e intervenir de manera adecuada [8].

Así pues, y retomando las conclusiones de Sanmartí [13], aunque los alumnos no acostumbren a verbalizar cómo plantean y pretenden resolver un problema, se ve necesario favorecer dicho proceso heurístico, estimulando la aplicación de estrategias de resolución fundamentales en la explicitación de las razones de las acciones que se llevan a cabo.

Ante todo ello, y con el fin de poder evaluar y regular la capacidad que se pretende conseguir con el proceso de enseñanza, Sanmartí [14] presenta las bases de orientación, o también llamadas guías de navegación o cartas de estudio, cuya finalidad, y de ahí su nombre, consiste en orientar el alumnado a llevar a cabo su tarea.

Concretamente, Sanmartí [14], [15] define una base de orientación como el instrumento que resume de manera gráfica y ordenada las acciones a realizar, y cuya finalidad recae en promover que los estudiantes anticipen y planifiquen las operaciones que deben llevar a cabo para resolver con éxito diferentes tipos de tareas escolares. Además, añade, a lo largo del proceso de enseñanza se tiene que promover su construcción de manera que cada alumno se elabore la suya propia.

En consecuencia, y siguiendo las directrices de Sanmartí [14], el objetivo prioritario del proceso de aprendizaje recae en la evaluación de la calidad de dichas bases de orientación porque, de hecho, resumen el conocimiento que los estudiantes habrán de interiorizar, es decir, de retener en su interior para activarlos cuando les sea necesario.

Podemos, pues, concebir una base de orientación como una secuencia resumida y ordenada de acciones cuidadosamente pensada y establecida que conlleve a resolver un problema o realizar una tarea concreta de manera satisfactoria, además de resultar una herramienta útil para la planificación, es decir, para poder realizar la acción de forma autónoma, así como su propia autoevaluación.

Por otro lado, y con el afán de que toda base de orientación sea interpretada como algo más que una colección ordenada de instrucciones, y especialmente con el objetivo que el estudiante la pueda identificar como algo suyo propio y le resulte realmente útil, será interesante que el alumnado intervenga en su proceso elaboración, pues seguramente será una ayuda a la hora de reconocer su propio proceso de aprendizaje y, a la larga, a la hora de aplicarla cada vez de forma más autónoma para resolver nuevos problemas, al mismo tiempo que aprender establecer cualquier otra que pueda necesitar.

Resolver un problema usando una base de orientación

Dentro de la competencia matemática, resolver problemas es una competencia básica y fundamental y que, por tanto, debe ser dominada por todos nuestros alumnos. Ante la dificultad que, como hemos visto, supone al alumnado adquirir (si así lo consiguen) esta competencia fundamental, nos preguntamos cómo deberían ser las actividades de guía y de trabajo (y, en consecuencia, de evaluación) que permitan mejorar la adquisición de dicha competencia (y de las que consigo que conlleve) a nuestro alumnado.

Concretamente, focalizamos esta problemática cuando se supone que el alumnado llega a un cierto punto de madurez, en el cual ya se ha realizado un cierto trabajo inicial en la adquisición de competencias y dicha adquisición debe empezar a manifestarse, pero en la que aún no siempre está lo suficientemente desarrollada. Nos estamos refiriendo al período de transición de la educación primaria a la educación secundaria.

Para ello, y teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se ha planteado un determinado problema junto con una base de orientación, tanto a alumnos de 6º de Educación Primaria como de 1º de Educación Secundaria Obligatoria.

El problema en cuestión, y que se presenta en la

Figura 1, está basado en el problema 10 de la actividad *Problemas a l'esprint* para Ciclo el Superior de Primaria, celebrada el 7 de febrero de 2010 [12].

Mi abuela es una especialista del ganchillo a quien le encanta hacer mantas. Aún no he visto la última que ha elaborado, pero me ha dicho que la he hecho enganchoando piezas cuadradas del mismo tamaño, pero de diferentes estilos.

Me ha explicado que para hacer el borde de la manta ha utilizado una docena de piezas de fondo verde con un rombo dibujado en su interior, y una docena de piezas de fondo blanco con lunares verdes. Además, me ha dicho, las ha puesto de manera alternada: una de fondo verde, una de fondo blanco,... y de manera que en las cuatro esquinas hay siempre una pieza blanca con lunares verdes.

1. ¿Cómo puede haber distribuido estas piezas para hacer el borde, la abuela?

También me ha comentado que la parte interior de la manta está formada por piezas cuadradas del mismo tamaño que las del borde, pero que, en cambio, son de varios colores.

2. ¿Puedo saber cuántas piezas de otros colores ha utilizada mi abuela para terminar la parte interior de la manta? ¿Cómo lo puedo saber?

Figura 1. Problema propuesto en *Problemas a l'esprint* para el Ciclo Superior de Primaria.

Con lo que respecta a la base de orientación asociada, y que se puede ver en la **Figura 2**, hay que notar que parte de las 4 fases principales que Polya [11] estableció para resolver un problema, y que hemos designado como dominios. A su vez, éstos han sido desglosados en los diferentes aspectos, que se corresponden con las diferentes dimensiones de la tarea a desarrollar, que se han considerado necesarios para poder afrontar el problema propuesto y para el cual se ha diseñado la base de orientación.

Resolución del Problema	
Dominios	Dimensiones
Comprendo el problema	D1. Identifico y entiendo los datos, las magnitudes y las unidades que aparecen en el problema.
	D2. Expreso (pienso y reescribo) el problema de alguna manera (resumen, esquema, gráfico, dibujo...) que me ayude a entenderlo lo mejor posible.
Estructuro y llevo a cabo un plan de acción	D3. Planifico y llevo a cabo cómo resolver el problema.
	D4. Busco (recuerdo, diseño...) y aplico estrategias que me puedan ayudar a resolver el problema siguiendo la planificación que he fijado.
Reviso	D5. Busco (recuerdo, diseño...) y aplico algoritmos y mecanismos para abordar las diferentes estrategias.
	D6. Reviso lo hecho. Puedo seguir los diferentes pasos de resolución, están bien explicados y los puedo entender. Obsv. Lo hago de manera constante, para asegurarme que lo entiendo y que lo puedo entender cualquier otra persona

	D7. Si no me sale, detecto donde me equivoco o donde me pierdo y vuelvo a plantear y trabajar estas partes.
	D8. Una vez resuelto, razono si se podría hacer de otras maneras.
	D9. Me aseguro de si puede haber otras soluciones o si solamente hay una.
	D10. Doy todas las soluciones posibles, explicando si son o no correctas y si tienen o no sentido.

Figura 2. Base de orientación propuesta para el problema analizado.

Más concretamente, el problema, junto con la base de orientación, ha sido propuesto en dos aulas de 6º de Educación Primaria, cada una de ellas de 24 alumnos; y en tres aulas de 24, 24 y 31 alumnos, respectivamente, de 1º de la ESO.

Tanto el profesorado como la realidad de cada una de estas aulas eran propios y diferentes entre sí. Además, tanto para los docentes implicados como para la mayoría de sus alumnos ha sido la primera vez que han utilizado una base de orientación para llevar a cabo la resolución de un problema.

Por ser la primera base de orientación con la que tanto estos profesores como sus alumnos han trabajado la resolución de un problema, la base de orientación utilizada no ha sido elaborada en el aula conjuntamente por el profesor y su alumnado. En este caso, se presentó una propuesta previa, tanto del problema como de lo que podría ser la base de orientación asociada, al profesorado, y junto con él se revisó, se consensuó, y se estableció una versión preliminar del material. Una vez establecido, los docentes lo presentaron a sus alumnos: por un lado el problema y, por otro, la base de orientación, ésta segunda como una estructura ya elaborada que debían poner en práctica, pero que posteriormente podrían criticar de manera constructiva con la finalidad de poderla mejorar y adaptar mejor a sus necesidades, pues esta es la finalidad última y principal de toda base de orientación.

En todas las aulas, el problema fue trabajado a nivel individual. Cada alumno se debía afrontar al problema por sí mismo, siguiendo los pasos sugeridos por la base de orientación. Antes de que el alumnado se pusiera manos a la obra, el docente presentó la base de orientación a sus alumnos, quienes debían familiarizarse con ella: la leyeron y, paso a paso, la revisaron conjuntamente. Una vez entendida, debían tenerla a mano para utilizarla a medida que iban resolviendo el problema. Finalmente, el problema fue comentado conjuntamente entre profesor y alumnado en clase, y cada alumno debía corregirse su resolución siguiendo la base de orientación.

A partir de esta experimentación, han surgido diferentes observaciones y matices que creemos interesantes de compartir.

Análisis de algunas resoluciones

A continuación presentamos algunas de las resoluciones al problema propuesto realizadas por los alumnos involucrados para, con ellas, analizar las consecuencias del uso de la base de orientación propuesta en la **Figura 2** para la resolución de dicho problema.

El análisis de dichas respuestas debería ayudarnos a afinar tanto la formulación del problema propuesto así como, y sobre todo, la base de orientación asociada, para asegurar que disponíamos de un buen candidato a ejemplo de material que conllevara un trabajo competencial en la resolución de problemas y así, tal como nos habíamos propuesto, dar un ejemplo adecuado de cómo debería ser una actividad de guía y de trabajo (y, en consecuencia, de evaluación) que permita mejorar la adquisición de dicha competencia. En otras palabras, asegurarnos la generación de un material genuino para trabajar la resolución de problemas desde un punto totalmente competencial, lo que supone no sólo permitir la resolución de un problema (en sentido competencial), sino promover la consciencia de todo el proceso de resolución que éste conlleva.

Empecemos estudiando la resolución que presenta la **Figura 3**, en la que, aunque por cuestión de tiempo, no se pudo resolver todo el problema, podemos detectar algunas peculiaridades interesantes.

Un primer paso, tal como propone la base de orientación, es detectar y entender los datos del problema. Veamos cómo, pues, con una cruz, se identifican claramente las “docenas”, lo que se corresponde con los datos más bien numéricos. A priori, no remarca ningún otro dato más, aunque, con el boceto inicial del problema que realiza, podemos deducir cómo ha interpretado el resto de datos. Por un lado, vemos que ha entendido correctamente que todas las piezas son cuadradas y que todas ellas deben de ser del mismo tamaño. En cambio, a partir de su propia e inicial representación del problema, notamos cómo no ha interiorizado correctamente que:

- en las 4 esquinas debe haber un tipo concreto de pieza
- en el interior las piezas son diferentes a las exteriores

La meva àvia és una especialista del ganxet i li encanta fer mantes. Encara no he vist l'última que ha muntat, però m'ha dit que l'ha fet enganxant peces quadrades de la mateixa mida, però de diferents estils.

M'ha explicat que per fer la vora de la manta ha fet servir una dotzena de peces de fons verd amb un rombe dibuixat i una dotzena de peces de fons blanc amb piquets verds. Les ha posat de manera alternada: una de fons verd, una de fons blanc,... i de manera que a les quatre cantonades sempre hi ha una peça blanca amb piquets.

1. Com pot haver distribuït aquestes peces per fer la vora, l'àvia? Una verda i l'altre blanca.

També m'ha dit que la part interior de la manta està formada per peces quadrades de la mateixa mida que les de la vora però que, en canvi, són de diversos colors.

2. Puc saber quantes peces d'altres colors ha fet servir l'àvia per acabar la part interior de la manta? Com ho puc saber?

Figura 3. Una resolució a la pregunta 1 del problema.

Así mismo, notemos como no tarda en darse cuenta de su error y no sólo eso, sino que además, tal como expone la base de orientación, actúa para entenderlo y rectificarlo. Con ello, además, establece su plan de acción:

Con su primera representación del problema el alumno se da cuenta de que el reparto de las piezas en los bordes no puede ser de 6 (de aquí podemos atrevernos a deducir que su primera idea es repartir $12+12=24$ piezas en 4 partes iguales –los bordes-, pero cómo comentábamos, a los alumnos les cuesta mucho verbalizar sus pensamientos y aquí tenemos un claro ejemplo) y, con ello, establece su estrategia de resolución que, en este caso y tal como pretendemos, ¡sí verbaliza! (más o menos bien redactado): “Sí, lo puedo saber porque puedes ir calculando el medio y las esquinas. No pueden ser de 6, así que a dos lados he restado uno y los otros dos lo he sumado”. Lo que nos viene a decir que, fijadas las esquinas, quita una pieza en dos de

los bordes paralelos para “dárselas” al par de bordes perpendiculares a ellos.

El alumno responde la pregunta explicando, no sólo cómo puede haberlo distribuido la abuela, sino cómo él lo ha determinado. Sin embargo, y debido al tiempo, no llega a concretar si puede haber más soluciones o si ésta es la única posible.

En la resolución que sigue a continuación, **Figura 4**, vemos cómo no sólo se identifican claramente (en este caso no se marcan sino que se extraen y se reescriben fuera del enunciado) los datos más bien numéricos, las “docenas”, sino también la forma y el estilo de las piezas, así como la clave de cómo éstas están distribuidas: de forma alternada fijando las esquinas con un tipo concreto de pieza. Además, desde un principio, y en su representación del problema, el/la alumno/a demuestra tener claro que las piezas del interior son totalmente diferentes a las exteriores, por lo que ni se preocupa en representarlas.

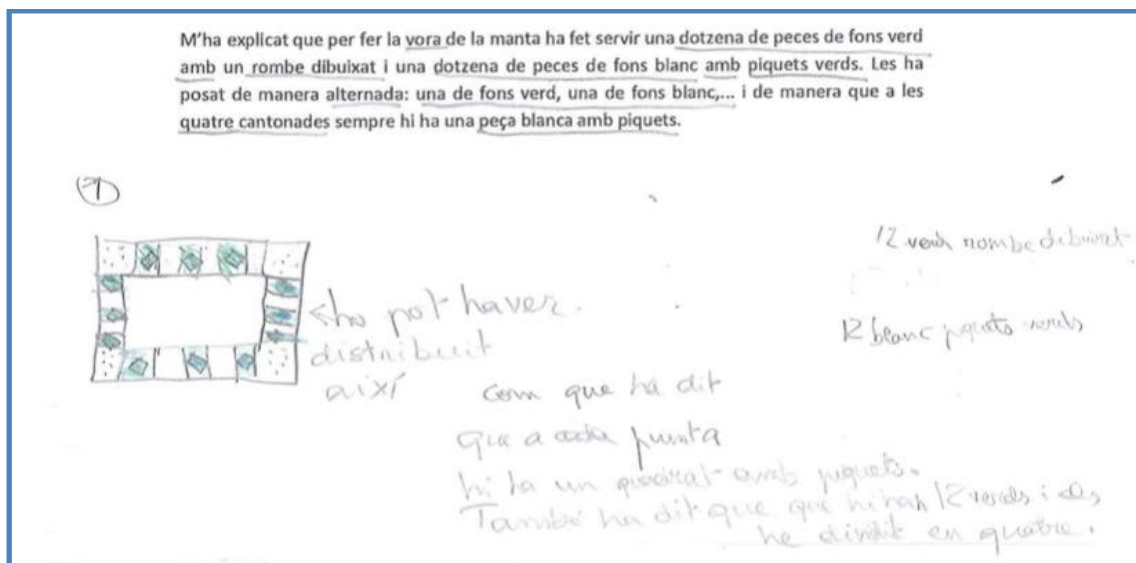


Figura 4. Una resolució a la pregunta 1 del problema.

Una vez tiene los datos claros, prepara su plan de acción. Sabe que dispone de 12 piezas verdes sin colocar. Decide que debe repartirlas entre los cuatro lados, lo que le proporciona su estrategia y con la que encuentra una primera manera de repartir las piezas del borde.

Siguiendo los pasos expuestos en la base de orientación, resulta clave tener claros los datos, identificarlos y entenderlos correctamente para poder emprender un adecuado plan de acción.

Veamos un tercer ejemplo, más completo, y en el que se llegan a responder las dos preguntas. Es el que podemos observar a través de las **Figura 5.1** y **Figura 5.2** y que siguen a continuación.

En esta resolución, en primer lugar, se extraen y concretan todos los datos que proporciona el problema: se tiene claro el número de piezas a colocar, así como su tamaño y distribución, la condición de las esquinas, y también que, inicialmente, las piezas interiores poco interesan. Además, para poder expresar el problema, establece un código para identificar dichos datos de manera visual y clara, con los que establece cómo intentará resolver el problema.

Su plan de acción se inicia determinando el número total de piezas que debe colocar: $12+12=24$, y se lanza a buscar alguna combinación que satisfaga la premisa. Parece que su estrategia ha sido empezar por crear un borde (y su paralelo) cuya cantidad de piezas se acerque más a la mitad de piezas de las que en total debe utilizar, teniendo en cuenta que las esquinas deben estar cubiertas por un tipo concreto de pieza. De esta manera, para el borde perpendicular sólo necesita una pieza, además de los dos bordes que ya tiene fijados. Con ello, puede controlar bien el reparto de piezas: 3 para el borde pequeño y el resto de piezas, quitando las esquinas ya colocadas, para los bordes perpendiculares.

A partir de esta situación inicial, ha visto claramente la posibilidad de otras configuraciones. Para ello, ha ido eliminando 2 piezas del par de bordes largos para añadirlos al par de bordes perpendiculares. De esta manera, obtiene un mecanismo para afrontar la estrategia que se había planteado. Además se percata de otra condición fundamental: que el número de piezas de cada par de bordes debe ser un número impar.

12 peces de fons verd + 12 peces de fons blanc = voron
 Sempre té que haveri peces blanques a la cantonada.

$12 + 12 = 24$ peces en total

x = blanc
 o = negre

Hi ha diferents maneres de solucionar, hi ha algunes quadrades i algunes rectangulars. Sempre de té tener que ser nombres senars.

?) Si la manta fos de 3×11 , serien 33 peces en total.

x	o	x	o	x	o	x	o	x
o	o	o	o	o	o	o	o	o
x	o	x	o	x	o	x	o	x

$11 - 2 = 9$
 $3 - 2 = 1$

$24 + 9 = 33$
 $9 \times 3 = 27$
 $27 + 24 = 33 - 24 = 9$

Figura 5.1. Resolución a las preguntas 1 y 2 del problema.

Acabamos de ver cómo, una vez ha encontrado una primera solución, y tal como propone la base de orientación, se ha lanzado a buscar otras posibilidades y, además, las ha encontrado. Durante el proceso ha habido un momento de confusión que, sin embargo, ha sabido detectar y rectificar satisfactoriamente. Ha sido capaz de revisar y corregir su atasco, haciendo caso de la base de orientación.

De esta forma, termina la primera parte del problema dando todas las soluciones posibles, pero no acaba de exponer si podría haber más o por qué éstas son las únicas. Simplemente enseña las configuraciones y la forma que tendría la manta, sin ninguna otra explicación.

¿Puede, pues, que falte un por qué en la pregunta del problema, o bien un matiz en la base de orientación que solicite alguna explicación más clara y concisa? ¿Qué sería preferible?

Para la segunda parte del problema, empieza retomando la primera combinación para la manta que había encontrado en la primera parte del problema y la representa. Fijémonos que, como ahora el problema recae en el interior de la manta, ahora sí representa e identifica de manera diferenciada las piezas que deben estar en su interior. Con ello, ratifica que identifica y entiende perfectamente los datos, al mismo tiempo que expresa el problema de la manera que le resulta más fácil y cómoda de interpretar. A partir de ahí, intenta encontrar una estrategia para determinar el número total de piezas interiores, siguiendo así los pasos que propone la base de orientación.

En este caso, pero, parece que, en un primer momento, la pregunta formulada no ha quedado del todo clara (notamos aquí, y cómo reflexionaremos posteriormente, que en el primer dominio de la base de orientación, faltaría una segunda dimensión que debería consistir en asegurarse de que se entiende(n) la(s) pregunta(s) que formula el problema), y con ello llega a una falsa conclusión, pero de la que posteriormente, como vemos, se da cuenta y rectifica satisfactoriamente. De nuevo, pues, parece que sigue la base de orientación para hacer frente a ello.

Fijémonos que, para concluir esta primera idea, aunque errónea, su estrategia consiste en tener en cuenta que el rectángulo que representa la manta está compuesto por cuadrados de

igual tamaño, con lo que puede multiplicar el número de elementos de ambos bordes o lados, es decir, aplicar el familiar "base por altura". Cuando detecta, pero, que con esta estrategia no responde realmente la pregunta formulada, sino que da el número total de piezas, intenta descubrir cómo saber el número de piezas interiores. Para ello parece que primero comprueba que, contando las piezas interiores de su dibujo y sumándolas a las 24 del borde que ya teníamos fijadas, se obtienen las 33 que había deducido anteriormente.

Una vez hecha esta comprobación, parece que ya tiene a punto su estrategia, ordenada, de resolución: calcula el número total de piezas multiplicando el número de cuadros de los bordes perpendiculares entre sí y, al resultado, le resta el número total de piezas que determinan el borde que, como ya conoce del principio, son 24.

Con esto, ya podría contestar la pregunta formulada pero, siguiendo la base de orientación, intenta también determinarlo usando alguna otra estrategia. ¡Y así lo hace! En este caso, ve que restando 2 al número de piezas de cada lado (pues para contar el interior se dejan de tener en cuenta las filas y columnas extremas, los bordes, en definitiva) y multiplicando ambos resultados, obtiene directamente el número de piezas interiores.

Una vez lo tiene claro, resuelve la problemática para las otras dos configuraciones de manta que había encontrado anteriormente, aplicando las dos estrategias de resolución que ha determinado estudiando el primer caso.

Si la manta fos de 7×7 , serían ~~49~~ ⁴⁹ 25 peces d'altres cobres.

x	o	x	o	x	o	x
o	m	m	m	m	m	o
x	m	m	m	m	m	x
o	m	m	m	m	m	o
x	m	m	m	m	m	x
o	m	m	m	m	m	o
x	o	x	o	x	o	x

~~$24 + 25 = 49$~~
 25
 $49 \times 7 \times 7 = 49$
 $49 - 24 = 25$

Per cada costat
 resto 2 peces.
 $7 - 2 = 5$ 5
 $7 - 2 = 5$ $\frac{5}{25}$

Si la manta fos de 9×5 , serían 21 peces d'altres cobres

x	o	x	o	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	o	x	o	x

$9 \times 5 = 45$
 $45 - 24 = 21$

$9 - 2 = 7$ 7
 $5 - 2 = 3$ $\frac{7}{21}$

Figura 5.2. Ejemplo de resolución a las preguntas 1 y 2 del problema.

Notemos que, aunque ha resuelto el problema de maneras distintas, no llega a verbalizar la respuesta ni sus porqués. Seguramente, este comportamiento nos ratifica que las dimensiones D8, D9 y D10 deberían ser más afinadas. En cuanto a las D8 y D9, especialmente la D9, se

trata de una acción que cuesta muchísimo y que no es muy natural. Se podría discutir hasta qué punto se debería(n) trabajar y considerar. En cuanto a la D10, una vez estudiada la experimentación llevada a cabo, nos surge la propuesta, seguramente más oportuna, que enunciase algo como: “Respondo las preguntas formuladas razonándolas de la manera más completa posible y que se entiendan.”, para así intentar promover al máximo una mejor y más detallada explicación por parte del alumno resolutor.

Primeras reflexiones

Después de esta primera aplicación con el material inicial nos hemos percatado de que, en general, los alumnos desconocen o no dominan muy bien palabras como *magnitud*, *estrategia* o *algoritmo*. En la lectura inicial, así como durante la sesión de trabajo, diferentes alumnos pidieron por su significado.

Es imprescindible que el vocabulario usado en la base de orientación sea, no sólo cómodo y ágil, sino también familiar al alumnado. Aquí, pues, entraría el debate de si sería necesario o no haberse asegurado que el alumnado dominase previamente este vocabulario, o cualquier otro más o menos técnico que quisiéramos emplear, realizando un trabajo previo o simultáneo a la aplicación o estructuración de la base de orientación, o bien si se deben usar expresiones lo más simple posibles, sin ningún otro añadido. Seguramente podría ser una buena práctica, en cada nivel, trabajar nuevos vocablos que queramos que aparezcan, posteriormente, en la base de orientación.

En cualquier caso, debemos estar muy seguros de las definiciones que aceptamos para dichos vocablos, ya que posiblemente no siempre los diccionarios o soportes que podamos utilizar en el aula coincidan en sus explicaciones. Así, por ejemplo, para las palabras que comentábamos, encontramos definiciones como las que se exponen en la **Figura 6**:

	RAE	Wikipedia
Magnitud	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tamaño de un cuerpo. 2. Grandeza, excelencia o importancia de algo. 3. <i>Astr.</i> Medida logarítmica de la intensidad relativa del brillo de los objetos celestes, medida que es mayor cuanto menor es su luminosidad. 4. <i>Fís.</i> Propiedad física que puede ser medida; p. ej., la temperatura, el peso, etc. 	<p><i>Matemáticas.</i> Un conjunto de entes que pueden ser comparados, sumados, y divididos por un número natural. Cada elemento perteneciente a una magnitud, se dice cantidad de la misma (por ejemplo: segmentos métricos, ángulos métricos y triángulos son magnitudes).</p> <p><i>Física.</i> Se dice de cualquier propiedad de un sistema que es susceptible de medición.</p>
Estrategia	<ol style="list-style-type: none"> 1. Arte de dirigir las operaciones militares. 2. Arte, traza para dirigir un asunto. 3. <i>Mat.</i> En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento. 	<p>La disciplina de coordinar las acciones y recursos para conseguir una finalidad.</p> <p><i>Informática.</i> Procedimiento o conjunto de reglas para tomar decisiones óptimas en el control de un proceso.</p>
Algoritmo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. 2. Método y notación en las distintas formas del cálculo. 	<p>En matemáticas, [...] es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad.</p>

Figura 6. Definiciones de palabras utilizadas en la base de orientación.

Pensamos que estas grandes diferencias merecen una reflexión pero que aquí no podemos abordar.

Tal y como expone la mayoría de la bibliografía consultada, ha sido complicado que, aún y usando la base de orientación, el alumnado expusiera por escrito sus ideas y pensamientos. Al no estar acostumbrados a hacerlo, seguramente sería necesario que la misma base de orientación, e incluso el enunciado del problema, recordara de manera sistemática que se debe escribir cualquier pensamiento o idea. Es imprescindible que la base de orientación conlleve la escritura de sus razonamientos, ya que de otra forma cualquier tipo de evaluación (tanto por parte del propio alumnado como del profesorado), no tendrá donde acogerse, pues no habrá documentación que poder valorar. Seguramente, a esta necesidad, será imprescindible un acompañamiento inicial y de habituación por parte del profesorado implicado. De hecho así también lo ha hecho notar el profesorado involucrado en esta práctica inicial.

Una vez aplicada la base de orientación, tal como hemos hecho notar anteriormente, se ha visto necesario e imprescindible considerar un paso en el primer dominio que inicialmente no se había contemplado. Se trata de la dimensión que se asegure que el alumnado entiende lo que pide hacer el problema en cuestión. Así, pues, sería necesaria una nueva dimensión, que podría ser colocada entre las actuales D1 y D2, que se podría resumir como:

“Entiendo todo aquello que el problema me pida que haga y tengo claras las preguntas que debo de responder.”

Surge también la duda de si las dimensiones que expone la base de orientación deberían aparecer en primera persona (tal como se ha presentado), o bien en modo pregunta. Según el alumnado involucrado, ya les ha parecido correcto usarla en primera persona, pero se podría discutir si sería preferible en formato pregunta.

Una parte del alumnado han encontrado las explicaciones de cada una de las dimensiones un poco largas. ¿Se podrían reducir? ¿Cómo? Algunos de ellos proponen reducir los ejemplos o pequeñas explicaciones que acompañan al objetivo que en ellas se plasma. ¿Realmente sobran, dichas explicaciones? ¿Dependería del trabajo previo realizado con la base de orientación?

La base de orientación aplicada contiene 10 dimensiones, y hemos detectado la necesidad de una más, con lo que serían 11. Para la mayoría de los alumnos 10 ya ha sido demasiado. ¿Sería factible reducirla? En este caso, ¿cómo sería preferible reducirla?, ¿se podrían unir ideas? ¿Cuáles?

Después de esta primera aplicación de la base de orientación, pensamos que posiblemente se podría eliminar la actual dimensión 3: “D3. Planifico y llevo a cabo cómo resolver el problema”, ya que, de hecho, se podría interpretar con el objetivo global del Dominio 2: “Estructuro y llevo a cabo un plan de acción”. Por otro lado, muchos alumnos han comentado que se podrían unir las dimensiones D4 y D5. Según cómo interpretemos los vocablos *estrategia* y *algoritmo* surge el debate de si realmente deben unirse o no, y, en cualquier caso, cómo debería establecerse para que quedaran claros sus matices y, por lo tanto, sus objetivos finales. Con lo que respeta a las dimensiones “D8. Una vez resuelto, razono si se podría hacer de otras maneras.” y “D9. Me aseguro de si puede haber otras soluciones o si solamente hay una.”, posiblemente se podrían unir y buscar para ellas una explicación más concisa que englobara las dos. Como ya hemos comentado anteriormente, se tratan de dos procesos, en general, poco trabajados y no muy naturales, por lo que se podría plantear hasta qué punto se pueden o deben considerar, realmente. En cuanto a la dimensión D10, y tal como se ha reflexionado en la presentación del último ejemplo de aplicación, posiblemente debería presentar un redactado más afinado para alcanzar, realmente, el objetivo que se plantea con él: argumentar al máximo la respuesta final que se da a la pregunta concreta realizada.

Por otro lado, alguno de los profesores involucrados han hecho notar que el Dominio 2 se podría sintetizar por: “Tengo un plan de acción”, para hacerlo más comprensible. Igualmente, el Dominio 3, que pensamos que se podría concretar como: “Reviso mi trabajo”, para así hacerlo más familiar al alumnado.

Las dimensiones que propone la base de orientación están presentadas como el conjunto de pasos que el alumnado debe llevar a cabo para resolver el problema. El orden en el cuál se presentan no tiene porque ser estrictamente el que se presenta en esta base de orientación inicial y que aquí presentamos, pues aunque el orden que se propone puede ser el que se ha considerado como el más lógico, como se ha dicho anteriormente, para resolver un problema entran en juego diferentes pasos que no tienen porque seguir siempre un orden concreto. Así

mismo, suele ser de ayuda para una persona no experta en resolución de problemas, poderse acoger a una propuesta de pasos ordenados. Este orden no necesariamente estricto, pero, conlleva otra reflexión: en el caso de afrontar la resolución de problemas, ¿sería preferible que la base de orientación no estuviese ordenada como un listado, en el sentido estricto de la palabra, y fuera más bien como un mapa conceptual? ¿Sería de más o menos ayuda? Si se presenta como un conjunto de pasos ordenados, tal como se presenta ahora, ¿deben estar numerados? ¿En algún momento debería haber una nota que indicase que el orden no tiene porque ser estricto?

Algunas reflexiones del alumnado implicado

Después de la experiencia llevada a cabo, y antes de establecer nuestras conclusiones, pedimos al alumnado implicado que reflexionase sobre el problema propuesto así como el uso de la base de orientación a la hora de resolver el problema.

Vemos interesante compartir algunas de sus observaciones ante el uso general de la base de orientación para resolver el problema propuesto, pues creemos que nos ayudan a consolidar algunas de las reflexiones finales a las que hemos llegado y exponemos al final de este artículo.

Entre las preguntas formuladas para tal fin destacamos la siguiente:

¿Crees que la base de orientación ayuda a la hora de resolver un problema? ¿Por qué?

Ante la cual, algunas de las respuestas más generalizadas y/o destacadas fueron las que comentamos a continuación.

En primer lugar, observamos como una parte importante del alumnado, aunque nunca haya utilizado una base de orientación, la acoge sin gran sorpresa sino más bien como una herramienta natural al proceso de resolución del problema y la ve como un conjunto de instrucciones que les ayuda a estructurar y ordenar su resolución, además de, como ellos mismos dicen y, de hecho pretende la base de orientación, les orienta en dicho proceso:

- *Sí, porque por ejemplo tú compras un juguete y sin las instrucciones adecuadas no se puede construir, al igual que un problema, no puedes resolverlo sin las acciones adecuadas.*
- *Sí, porque así es más fácil orientarte a la hora de hacer el problema.*
- *Creo que ha sido una ayuda con el problema tener una base de orientación, porque así te aseguras que has hecho todos los pasos correctamente y en orden*
- *Sí, porque te estructura cómo hacerlo.*
- *Sí, porque te ayuda a organizarte.*

Al mismo tiempo que, parece, les sirve para darles aquel empujón inicial que no siempre tienen, pero que necesitan y que es imprescindible a la hora de enfrentarse al problema:

- *Sí, porque cuando resuelves un problema a veces no sabes por dónde empezar y estás un poco perdido y esta base de orientación te puede ayudar a ver el camino que tienes que seguir para resolver el problema.*
- *Sí, porque si no sé por dónde empezar, me ayuda a situarme.*

O bien que les lleva a recordar aquellas herramientas que les pueden facilitar su entendimiento, pero que no siempre, de primeras, tienen en cuenta y si alguien no se las recuerda no son capaces a considerar:

- *Yo creo que sí porque yo antes no utilizaba ni croquis ni dibujos pero como aquí lo ponía lo probé y me fue mejor.*
- *Sí, porque te dice tácticas y también los pasos que tienes que hacer.*
- *Sí, porque te da buenos consejos.*
- *Sí, porque te puede dar pistas.*

Además, confirman que usar la base orientación les permite volver atrás en su proceso para recordar lo que llevan haciendo siempre que lo necesitan y así percatarse de aquellos aspectos que uno se ha podido olvidar o dejar a medias por el camino:

- *Creo que utilizar la base de orientación es muy práctico para hacer problemas ya que puedes ver los pasos que has hecho y los que no, y así identificar un posible error.*

Y, con ello, en consecuencia, ser conscientes de lo que hacen en cada momento (lo que, además, favorece el proceso de autoevaluación y su propio aprendizaje) y que, tal como se dan cuenta con esta reflexión, no se puede llevar a cabo si no se escribe lo que se piensa en todo momento:

- *Sí, porque te ayuda a reflexionar sobre lo que has escrito.*
- *Sí porque te ayuda a analizar y a hacer mejor el problema.*

Todas estas ideas se ven reforzadas cuando, además, se lleva a cabo una corrección o comentario general final de la clase junto con el profesor/a de la resolución del problema siguiendo también la base de orientación.

Así mismo, la resolución del problema usando la base de orientación no es un ejercicio de fácil y rápida aplicación, sino que requiere de bastante práctica y familiarización. Así lo confirman comentarios como el que sigue a continuación:

- *Bueno, me cuesta un poco aplicar la base de orientación en los problemas porque es una cosa nueva.*

Y más complicado se ve su correcta incorporación cuando se empieza a aplicar en un punto del proceso de aprendizaje en el cual se cree (el alumnado) que ya se dispone de unos buenos procedimientos o ideas de trabajo, sean más o menos adecuados, o más o menos parecidos, pero que están suficientemente establecidos y afianzados:

- *No siempre porque puede que ya estés acostumbrado a hacerlo de tu manera y lía un poco.*
- *No, porque hay gente, como yo, que tienen su manera.*
- *A mí no me sirve de mucho porque tengo mis pasos. Mis pasos son parecidos a los de la base de orientación pero me lía tanta letra.*

El hecho de tener un proceso interiorizado, aunque no sea el adecuado, resulta un hecho fundamental para algunos alumnos, a quien, parece, los molesta tener que replantearlo o, simplemente, contrastarlo:

- *Voy a ser sincero, a mí no me ha ayudado demasiado porque con tantos pasos me hago un nudo. Porque yo, es como si tuviera los pasos de la base de orientación pero más resumidos en mi cabeza, y a la hora de hacer el problema es más fácil para mí (seguir sus propios pasos).*
- *A mí no me ayuda porque yo lo hago de maneras diferentes y me va peor utilizarla.*

Y, teniendo en cuenta que la finalidad de la base de orientación es ayudar a un resolutor no experto, seguramente, no tendrá mucho sentido su aplicación para un supuesto experto resolutor de problemas:

- *Sí, pero no la he utilizado demasiado porque ya me sabía los pasos para realizar un problema. Pero sí a alguien le cuesta mucho (resolver un problema) le puede ayudar.*

En cualquier caso, y tal como ya hemos ido advirtiendo, un aspecto fundamental para que la base de orientación sea verdaderamente útil y eficaz es que esté bien asociada al problema a trabajar. Así también lo notan algunos de los alumnos implicados:

- *Sí que puede ayudar, pero en algunos casos especiales te puede liar un poco si la tienes que seguir al pie de la letra, porque no todos los problemas siguen los mismos pasos.*
- *Sí, pero depende de qué problema no haría falta seguir todos los pasos pero es importante porque así no te olvidas de hacer ningún paso y puedes hacerlo mejor.*

Conclusiones finales

Después de la experiencia llevada a cabo podemos concluir que el uso de la base de orientación en la resolución de problemas puede ser una buena herramienta y su uso una práctica muy satisfactoria para ayudar al alumnado en la adquisición de competencias, en especial, la matemática, y más concretamente, la de resolución de problemas, pues con ellas, poco a poco, el alumnado va entrando en una práctica mucho más visible que posibilita la verbalización de sus pensamientos: familiarización de conceptos y desarrollos, razonamientos,

organización y aplicación de los mimos, con lo cual el alumnado tendrá la posibilidad de rectificar sus errores y, en consecuencia, poder guiar sus propias argumentaciones y resoluciones; a la vez que puede permitir al profesorado ayudar y guiar mucho mejor a sus alumnos en todo este proceso y, así, posibilitar una mejora en la adquisición de dicha competencia (y de todas la que, con ella, entran en juego).

Sin embargo, para que ello sea posible, observamos que es necesario afinar muy bien el material utilizado: el problema en su sentido más competencial, pues debemos percatarnos que realmente se trata de un problema y no de un simple ejercicio para el alumnado y, sobre todo, la base de orientación, especialmente en cuanto al vocabulario que utiliza, a cómo está ligado al problema planteado y su concreción y, parece ser también, a la forma en la cual se presenta.

La experimentación ha tenido lugar en los cursos de 6º de Primaria y 1º de la ESO, cuando el alumnado ya tiene un cierto manejo en la resolución de problemas. Esto nos ha hecho ver que puede ser una dificultad para la incorporación de las bases de orientación si previamente no se han trabajado, pues para ellos es como intocable el hecho que ya tengan una cierta idea de cómo resolver los problemas. Una idea posiblemente errónea si todos ellos consideran que todos los problemas requieren de los mismos pasos. Si bien desde el inicio de la primaria el alumnado asume la idea de que para resolver un problema hay que considerar 3 únicos aspectos y fundamentales: datos, operación y resultado; está claro que éstos no son suficientes, y que ponemos en duda de si fundamentales. Además, y en la mayoría de casos, se ciñen, y en cualquier caso, a la resolución de un mero ejercicio, por lo que nos atrevemos a decir que, en general, la consideración de estos tres únicos pasos y sin más, no conllevan, para la mayoría del alumnado, a una adquisición de la competencia en resolución de problemas. La incorporación de la base de orientación, si bien puede contemplar estos tres aspectos, no hay duda de que guía, en cualquier caso, en qué sentido y de cómo deben entenderse, al mismo tiempo que los engloba en el conjunto de aspectos e ideas real y necesario para aprender resolver el problema que, de otra forma, dejan, desgraciadamente, de considerarse. Con todo ello, pensamos que lo ideal, pues, sería aplicar dicha práctica lo antes posible, justo al iniciar el trabajo en resolución de problemas, para que el alumnado interiorizara realmente dicha práctica y así potenciar, desde un principio, una buena adquisición en la competencia de resolución de problemas.

Finalmente comentar que, a partir de todas las observaciones y reflexiones obtenidas, estamos trabajando en la actualización del material aquí presentado para, en el tercer trimestre del presente curso, llevar a cabo una nueva aplicación (con el material actualizado) y así poder contrastar y corroborar los resultados obtenidos y, en consecuencia, poder establecer las bases más afinadas y adecuadas para configurar los recursos finales que, con todo ello, nos proponemos obtener.

Referencias bibliográficas:

- [1] Bolívar, A. (2008): "Reseña de *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular* de Rico Romero, L. y Lupiáñez Gómez, J.L". Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, vol. 12, núm. 3, pp. 28-31, 2008.
- [2] Bolívar, A. (2009): "Evaluar competencias no tiene sentido si no se trabajan de modo congruente en clase". Ideal en clase. 13 de Junio de 2009. <http://en-clase.ideal.es/index.php/noticias/actualidad/327-levaluar-competencias-no-tiene-sentido-si-no-se-trabajan-de-modo-congruente-en-claser.html> [marzo 2013]
- [3] Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. "Desplegament del currículum a l'educació primària". http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/ba660da6-65cf-4a60-ad02-d70b78c13bb4/desplegament_pri.pdf [marzo 2015]
- [4] Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya. "Desplegament del currículum a l'educació secundària obligatòria (ESO)". http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c2c17d15-7c0a-492e-9f21-9f024ae4e141/desplegament_c_eso.pdf [marzo 2015]
- [5] Direcció General d'Educació Infantil i Primària. Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2013). "Identificació i desplegament de les competències bàsiques en el currículum". Junio 2013. <http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/2a5f1d0d-bde2-4e80-8cf1->

- [6f75717a13aa/ISO-8859-1%27%27Presentacio%20territoris%20CB%20generalv5Prim%20i%20SEc.pdf](https://www.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_primaria.pdf) [marzo 2015]
- [6] Direcció General d'Educació Infantil i Primària. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2013). "Competències bàsiques en l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària". Enero de 2013. http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_primaria.pdf [marzo 2015]
- [7] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. (2013). "Competències bàsiques en l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria". Gener de 2013. http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_ESO.pdf [marzo 2015]
- [8] Jimenez Garcia, Daniel. (2012): "La base d'orientació com una eina útil per a resoldre problemes de física". Treball de fi de màster de l'especialitat de Ciències naturals. Màster de Formació del professorat d'Educació Secundària UPF-UOC. <http://repositori.upf.edu/handle/10230/20070> [marzo 2015]
- [9] Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010): "Thinking Mathematically". (1982, 1st edition; 2010, 2nd edition). Pearson Education Limited. Second edition published 2010.
- [10] Niss, M.; Tomas, H. (eds.) (2011): "Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark". IMFUFA, tekst nr. 485/2011. English edition. Roskilde University, Denmark. October 2011.
- [11] Polya, G. (1945, 1st edition; 1957, 2n edition) How to solve it. A new aspect of mathematical method. Ishi Press International. New York and Tokyo, 2009.
- [12] Problemes a l'esprint. (2010): Activitat en línia. Cicle superior de primària. 17 de febrer de 2010 <http://www.cangur.org/espfebrer10/prim/index.htm>
- [13] Sanmartí, N. (2002): "Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria". Síntesis Educación, DL. Madrid, 2002.
- [14] Sanmartí, N. (2010): "Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències". Noviembre 2010. http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/fc53024f-626e-423b-877a-932148c56075/avaluar_per_aprendre.pdf [marzo 2013]
- [15] Sanmartí, N.; Prat, A; Pigrau, T; Al·lès, G.: "Rebot de recursos per fer una avaluació gratificant". <http://tresorderecursos.wix.com/avaluacio> [marzo 2015]
- [16] Schoenfeld, A.H. (1983): "*Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*". Washington, DC: Mathematical Association of America.
- [17] Schoenfeld, A. H. (1992): "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics." D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- [18] Schoenfeld, A.H. (2007): "What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed?". Assessing Mathematical Proficiency MSRI Publications. Volume 53, pp.59-73, 2007.
- [19] Schoenfeld, A.H. (2013): "Reflections on Problem Solving Theory and Practice". The Mathematics Enthusiast (TME), Vol. 10, nos.1i2, pp.9-34, 2013.
- [20] Voskoglou, M. Gr. (2008): "Problem solving in mathematics education: recent trends and development". Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche), n18, pp.22 - 28, 2008.