Sona: una herramienta didáctica para primaria y secundaria

Manuel García Piqueras; Antonio Bueno Aroca; José Luis Muñoz Casado

email: mgpiqueras@gmail.com; abueno34@gmail.com; jose.munoz.casado@gmail.com

IES Bonifacio Sotos, Casas-Ibáñez – Albacete; IES Parque Lineal – Albacete. Facultad de Educación, UCLM – Albacete; IES Salvador Dalí – Madrid.

RESUMEN

El taller trata distintos aspectos matemáticos relacionados con los sona, unos dibujos realizados por tribus africanas.

En concreto, se plantean dos problemas relativos a los sona y, posteriormente, se muestran estrategias matemáticas para resolverlos. Dichas estrategias constituyen una herramienta didáctica que aúna aspectos geométricos y algebraicos, a la vez que favorecen la utilización de técnicas para la resolución de problemas.

Por otra parte, se trata de un recurso que puede adaptarse a etapas y niveles educativos muy diferentes, desde la educación primaria en adelante.

Palabras clave: Sona, Espejos, Conjetura, Geogebra, Enseñanza y aprendizaje.

1. Introducción

En primer lugar se realiza una breve reseña acerca del origen y el empleo de los sona, unos dibujos realizados por distintas tribus africanas, estudiados y puestos de relieve, entre otros, por el matemático Paulus Gerdes ([6] y [7]).

Desde un punto de vista didáctico, los sona son de gran interés, ya que sintetizan aspectos geométricos y algebraicos. Además, el estudio de sus propiedades favorece el aprendizaje de técnicas y estrategias para la resolución de problemas ([2], [4] y [5]).

Además, se trata de un recurso que puede adaptarse a etapas y niveles educativos muy diferentes, desde la educación primaria en adelante.

Para conocer cómo las tribus africanas emplean los sona, se proyectan láminas y vídeos [3] que ilustran cómo los cuentacuentos de las tribus africanas utilizan los sona en sus historias.

Figura 1. Vídeo sona titulado 'El perro y el cazador'.

2. Sona tipo mesa de billar

Se ponen de manifiesto ciertas propiedades matemáticas que guardan estrecha relación con determinados tipos de sona. Entre dichos tipos haremos hincapié en aquellos que son llamados *mesa de billar*.

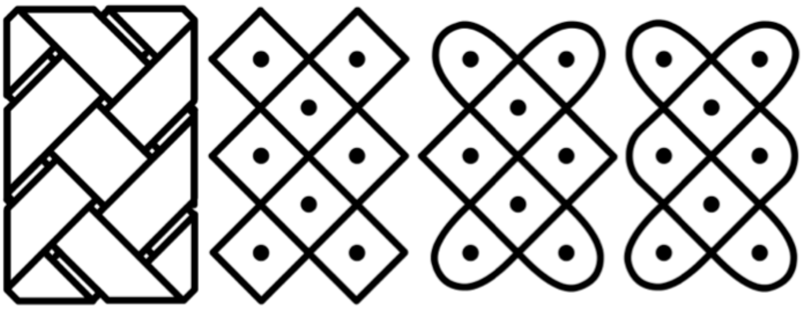

Figura 2. Sona tipo mesa de billar.

2.1. Planteamiento de la conjetura del máximo común divisor

Estudiaremos el número de *trayectorias*, también llamadas *líneas cerradas*, necesarias para realizar un sona tipo mesa de billar cualquiera. Es decir, se plantea la necesidad de completar una tabla de 9×9 posiciones, de manera que sepamos cuántas trayectorias son necesarias para realizar un sona de m filas y n columnas con $m, n \leq 9$.

	1	2	[illegible]	4	[illegible]	6	7	8
1	1	1	[illegible]	1	[illegible]	1	1	1
2	1	2	1	2	[illegible]	2	1	2
3	1	1	3	[illegible]	[illegible]	3	1	1
4	1	2	1	[illegible]	1	2	1	4
5	1	1	1	[illegible]	5	1	1	1
6	1	2	3	[illegible]	1	6	1	2
7	1	1	1	[illegible]	1	1	7	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8

Figura 3. Tabla con el número de trayectorias necesarias para realizar un sona tipo mesa de billar en función de su número de filas y columnas de puntos.

Para recoger datos utilizaremos *plantillas de Geogebra* para estudiar las propiedades básicas de los sona tipo mesa de billar [1]. Estas herramientas nos ayudarán a obtener datos suficientes para elaborar una tabla donde se contabilicen el número de líneas cerradas necesarias para realizar sona tipo mesa de billar hasta dimensión 9×9.

2.2. Planteamiento y resolución de la conjetura del máximo común divisor.

El acopio de datos para la tabla anterior junto con el manejo de las plantillas Geogebra mencionadas, nos habrá ayudado a poner de relieve tres propiedades fundamentales relativas a este tipo de sona:

<u>Propiedad 1</u>: Los sona tipo mesa de billar formados por una única fila o columna, necesitan de una única trayectoria para su realización.

<u>Propiedad 2</u>: Los sona tipo mesa de billar de dimensión m□n, necesitan del mismo número de trayectorias que aquellos de dimensión n□m.

<u>Propiedad 3</u>: Los sona tipo mesa de billar m□m, es decir, aquellos que tienen el mismo número de filas que de columnas, están formados por exactamente m trayectorias.

A la vista de los datos recogidos, elaboraremos la conjetura para resolver el problema planteado.

Una vez planteada una hipótesis plausible con los datos recogidos, nos apoyaremos en las propiedades 1, 2 y 3 puestas de manifiesto anteriormente para conseguir una prueba no formal.

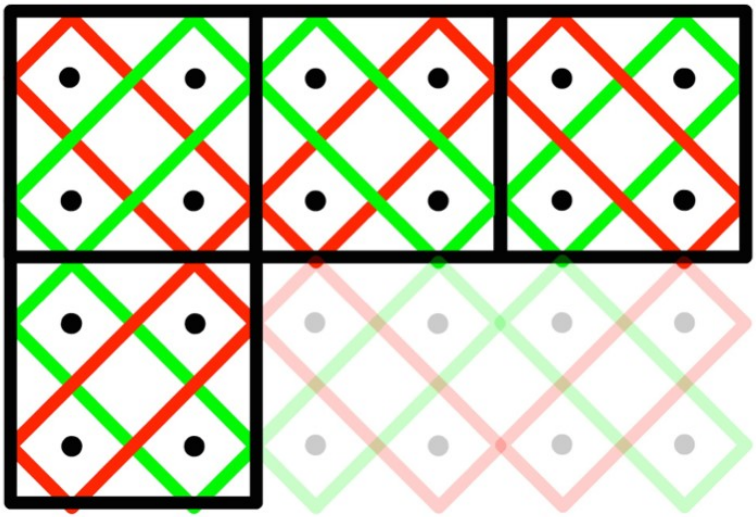

Figura 4. Demostración visual de la conjetura del máximo común divisor.

3. Sona de espejos monolineal

En esta parte se comenta que las tribus africanas que realizan los sona muestran más interés por aquellos que están formados por una única trayectoria (sona *monolineales*).

Si bien los *espejos* o *paredes rebote* no son realmente trazados cuando se realizan los sona, se encuentran bien presentes en la mente del encargado de realizar los dibujos. Un ejemplo de la intervención de espejos en la realización de un sona sería la figura 5.

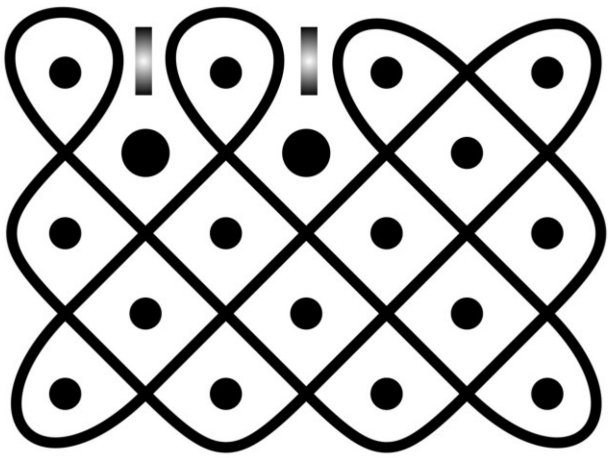

Figura 5. Sona tipo mesa de billar con espejos.

3.1. Planteamiento de la conjetura del sona monolineal

La preferencia de las tribus africanas por los sona formados por una única trayectoria comentada anteriormente, motiva la siguiente cuestión que vamos a plantear:

Dado un lusona formado por varias trayectorias, ¿es posible colocar espejos o paredes rebote internas de manera que nos quede un lusona formado por una única trayectoria?

Al igual que en el problema planteado anteriormente utilizaremos plantillas Geogebra [8] para ilustrar, por una parte, los puntos posibles donde se puede colocar un espejo y, por otra parte, los distintos casos que nos podemos encontrar.

<u>Caso 1</u>: Supongamos que en el punto donde colocamos un espejo se cruzan dos trayectorias diferentes. Entonces ambas trayectorias quedarán unidas en una sola, de manera que su número se verá reducido en una unidad (ver figura 6).

<u>Caso 2</u>: Si en el punto donde colocamos un espejo las líneas que se cruzan pertenecen a la misma trayectoria, se nos presentará uno de los dos casos siguientes:

<u>Caso 2a</u>: Los extremos del espejo no quedan *contenidos* en la trayectoria que cortan, tal y como puede apreciarse en la figura 7. En este caso la trayectoria cerrada *se parte en dos*, separada por el espejo que acabamos de colocar. Así pues, en esta ocasión el número de trayectorias aumentaría en una unidad.

<u>Caso 2b</u>: Los extremos del espejo que se coloca quedan contenidos en la trayectoria que corta. En esta ocasión la trayectoria recorrería los mismos puntos con y sin espejo (ver figura 8). Por tanto, en este caso el número de trayectorias no se ve alterado.

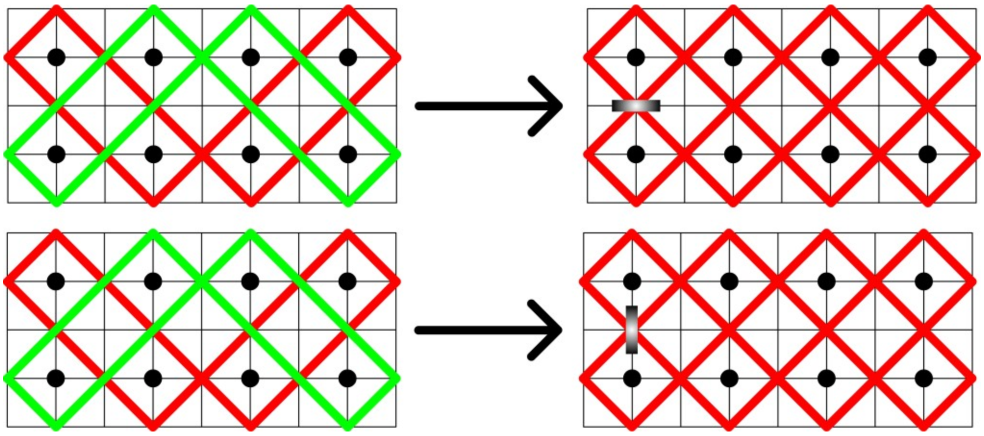

Figura 6. Espejos que disminuyen en una unidad el número de trayectorias.

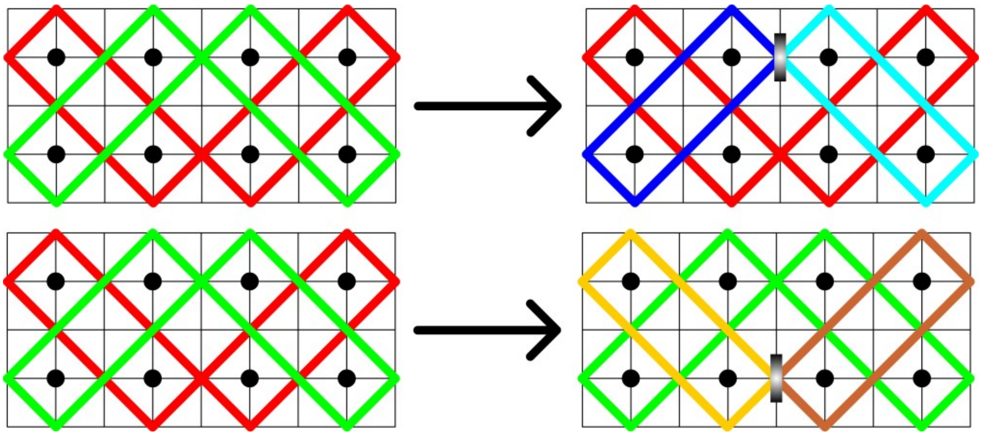

Figura 7. Espejos que aumentan en una unidad el número de trayectorias.

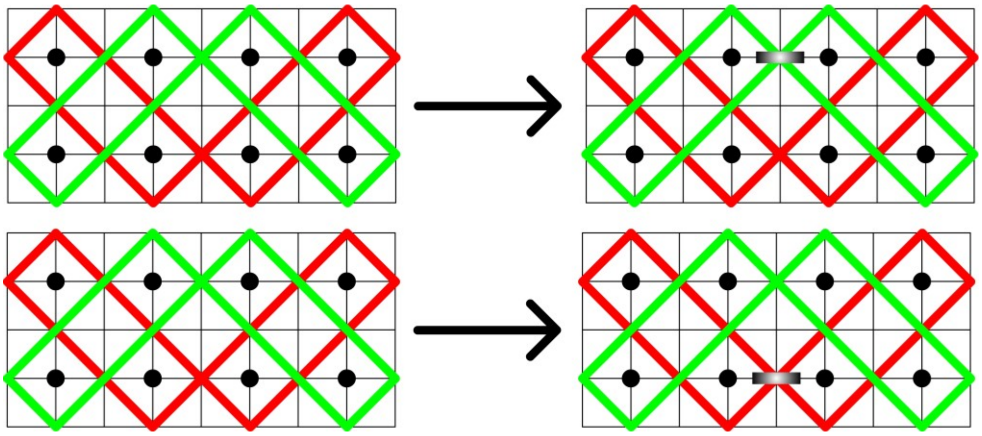

Figura 8. Espejos que no modifican del número de trayectorias.

3.2. Formulación y resolución de la conjetura del sona monolineal

Utilizamos los casos desgranados anteriormente para elaborar un procedimiento que elimine una a una las trayectorias que conforman un sona cuadrado.

Una vez que conocemos cómo eliminar trayectorias en un sona cuadrado, ofrecemos la siguiente propiedad:

Propiedad 4: Dado un lusona $m \times n$, consideramos un lusona cuadrado cuya dimensión sea $s \times s$ de manera que $s \leq \min(m,n)$ (es decir, la dimensión del cuadrado es menor o igual que cualquiera de las dimensiones del rectángulo). Entonces, si adosamos al lusona $m \times n$ el lusona cuadrado $s \times s$, el número de trayectorias del lusona resultante conservará el número de trayectorias original.

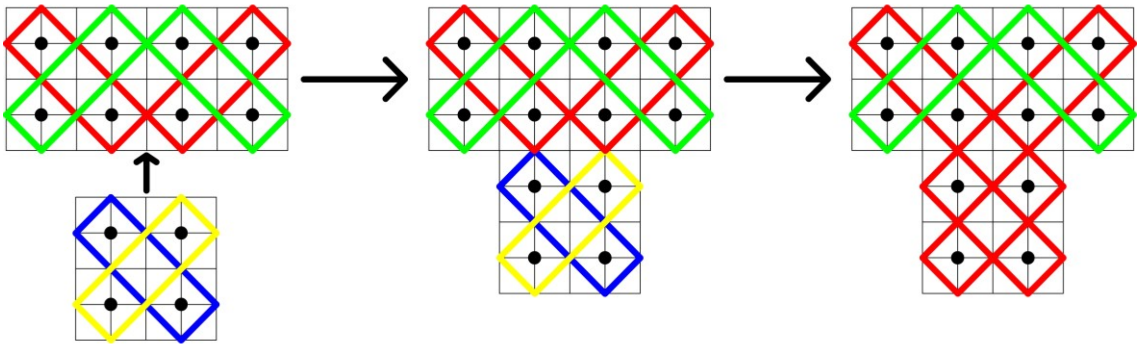

Figura 9. Resultado de adosar un sona 2×2 a otro 4×2

Combinando esta última propiedad y el procedimiento mencionado anteriormente para eliminar trayectorias de un sona cuadrado, podremos elaborar una estrategia ganadora para resolver el problema planteado.

4. Recursos necesarios

- Cañón proyector.

- Cable VGA para conectar un portátil al cañón proyector.

- Altavoces disponibles para reproducir sonido, así como el cable necesario para su conexión con un ordenador portátil.

- Sala de ordenadores con la aplicación Geogebra disponible para su utilización por parte de todos los asistentes al taller, así como acceso a internet. En su defecto, convendría avisar de que es fundamental asistir al taller con un ordenador portátil con la aplicación Geogebra instalada y con posibilidad de acceder a internet.

Nota: No sería necesario disponer de un ordenador para los responsables del taller, ya que traerán el suyo.

5. Bibliografía

[1] BUENO AROCA, Antonio (2015). “Plantillas Geogebra de tableros sona”. Disponibles a través de http://goo.gl/Zftvp0 y http://goo.gl/q20u0n.

[2] GARCÍA PIQUERAS, Manuel (2013). “Una historia de la proporción”, Nivola, Madrid (España).

[3] GARCÍA PIQUERAS, Manuel (2013-14). “Vídeos y láminas relacionados con los sona”. Disponibles a través de http://goo.gl/YYna2m.

[4] GARCÍA PIQUERAS, Manuel (2014). “Sona: una herramienta didáctica, un algoritmo y un corolario”. *La Gaceta de la RSME, Vol. 17*, Núm. 4, Págs. 765–782, Madrid (España).

[5] GARCÍA PIQUERAS, Manuel (2015). “Un atardecer en África y América”. Revista Suma, Núm. 78, *en prensa*, Badalona (España).

[6] GERDES, Paulus (1999). “Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations”, The Mathematical Association of America, Washington DC (USA).

[7] GERDES, Paulus (2007). “Drawings from Angola: Living Mathematics”, Research Centre for Mathematics, Culture and Education, Maputo (Mozambique).

[8] MUÑOZ CASADO, José Luis (2015). “Plantillas Geogebra de espejos sona”. En desarrollo.