Mosaicos con *pattern blocks*

Juan Vicente Riera[1]; Maria Àngels Rueda[2]; Daniel Ruiz-Aguilera[1]

email: jvicente.riera@uib.es; manangels@gmail.com; daniel.ruiz@uib.es

[1]Universitat de les Illes Balears; [2]CEIP Son Anglada – Palma

RESUMEN

En este taller se trabajará la construcción de mosaicos con el material *pattern blocks*, formado por piezas poligonales de color. La configuración de este material permite la construcción de los tres mosaicos regulares, y siete de los ocho mosaicos semiregulares. Se trabajarán diversos contenidos geométricos y de medidas relacionados con los mosaicos, como la traslación, la simetría, los giros, las medidas angulares o la superficie, así como el desarrollo de la regularidad y los patrones. Este material resulta idóneo para su uso en la enseñanza de estos conceptos en todos los niveles educativos, desde educación infantil a educación universitaria.

Mosaicos, patrones, geometría, regularidad, simetría, material manipulable

1. Introducción

Pattern blocks es un material manipulativo que fue elaborado en los años 60 por “Elementary Science Studies” [1,2]. Su uso didáctico se ha popularizado por su gran versatilidad: como material de construcción, de manipulación, de abstracción y, en el caso que nos interesa, como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas. En la imagen 1 se puede observar el material, comercializado por “Miniland” con el nombre de *Geomosaic*.

En efecto, *pattern blocks* puede servir en el aprendizaje de diferentes bloques de contenidos. En el caso del bloque de números podemos trabajar los enteros, las fracciones e incluso los irracionales, también se puede trabajar el bloque de medida, en particular los conceptos de área y perímetro. Pero el bloque principal de aplicación de esta herramienta didáctica es el de geometría, donde se enmarca este taller. En concreto se plantearán diferentes ideas sobre cómo se pueden crear, visualizar y comprender de manera atractiva y lúdica los mosaicos.

Imagen 1: piezas de *pattern blocks*

2. Descubriendo el material

Las formas y colores de las piezas que componen *pattern blocks* nos permiten realizar diferentes tipos de clasificaciones. En Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria este material permite trabajar razonamiento lógico a partir del color y de la forma.

Clasificando las piezas por color, observamos que formas con el mismo color corresponden a un mismo polígono, como se puede observar en la imagen 2. En concreto se tiene:

- Color verde: triángulo equilátero
- Color naranja: cuadrado
- Color rojo: trapecio
- Color azul: rombo
- Color blanco (o crema): rombo
- Color amarillo: hexágono

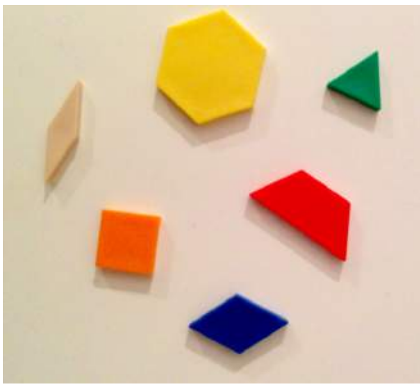

Imagen 2: las seis figuras diferentes de *pattern blocks*

Otra posible clasificación es a partir de sus dimensiones: longitud y superficie. Por ejemplo, tomando como lado unidad el del triángulo equilátero, podemos ver que el trapecio es el único que tiene lados diferentes al del triángulo equilátero. En este caso podemos calcular el perímetro de todas las figuras: el triángulo tiene perímetro tres, el cuadrado y los rombos tienen perímetro cuatro, el trapecio cinco y el hexágono seis. En el caso de clasificación a partir de la superficie, si tomamos el triángulo equilátero como unidad de área, el rombo azul tiene área dos, el trapecio tres y el hexágono seis. Bajo estas hipótesis surge una pregunta sobre las dos figuras restantes: el cuadrado y el rombo blanco, puesto que su medida no es inmediata a partir del triángulo equilátero.

Otras posibilidades de clasificación serían en función del número de lados o si son o no polígonos regulares e irregulares.

Un aspecto digno de estudio es analizar particularmente cada una de las formas de *pattern blocks*. Por ejemplo, ya que queremos desarrollar el tema de los mosaicos, nos centraremos en la medida de los ángulos interiores de las piezas. Esto se puede conseguir sin tener que usar ningún tipo de instrumento de medida angular. Basta tener en cuenta que el ángulo completo mide 360º y éste se puede descomponer en diversos ángulos interiores de un mismo polígono. Así, obtenemos los siguientes resultados, como se puede observar en la imagen 3:

- Triángulo equilátero: tres ángulos de 60º.
- Cuadrado: cuatro ángulos de 90º.
- Trapecio: dos ángulos de 120º y dos ángulos de 60º.
- Rombo azul: dos ángulos de 120º y dos ángulos de 60º.
- Rombo blanco: dos ángulos de 30º y dos ángulos de 150º.
- Hexágono: seis ángulos de 120º.

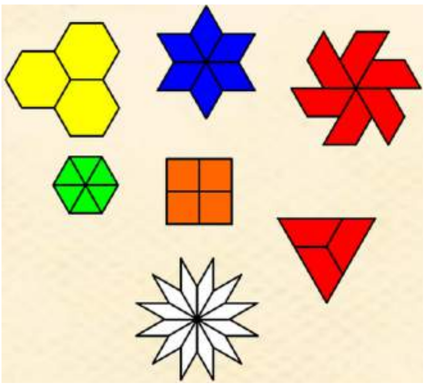

Imagen 3: Descomposición del ángulo completo con cada figura de *pattern blocks*

Todas las figuras que aparecen en este documento se han generado con el applet *pattern blocks* de “MathToybox”: http://mathtoybox.com/patblocks3/patblocks3.html, si bien existe la aplicación más completa, llamada “Mandalar”, disponible en las diferentes plataformas para su instalación en dispositivos móviles o tabletas.

3. Mosaicos con *pattern blocks*

El objetivo principal de este taller es la construcción y análisis de los diferentes mosaicos que se pueden elaborar con las piezas de *pattern blocks*. Primero de todo, dejaremos unos momentos para construir libremente mosaicos, recordando previamente dos condiciones básicas que se deberán satisfacer:

1. El mosaico no debe contener huecos
2. Las figuras que lo forman no se pueden superponer

3.1 Teselaciones simples y mosaicos regulares

Una primera pregunta que nos hacemos es:

¿Con qué figuras de *pattern blocks* se puede teselar el plano usando una misma figura de forma repetida?

Después de manipular y experimentar con las piezas de *pattern blocks*, podemos llegar a la conclusión de que con todas ellas se puede recubrir el plano, y en general también con cualquier triángulo o cuadrilátero. En la imagen 4 se puede observar una teselación periódica con cada una de ellas.

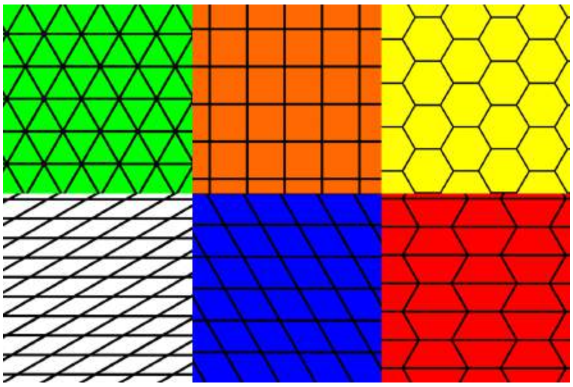

Imagen 4: Mosaicos regulares con las piezas de *pattern blocks*

De estos teselados, hay tres que tienen la característica de estar formados por polígonos regulares: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Justamente estos son los únicos mosaicos regulares que se pueden construir.

Es interesante destacar que además de las soluciones propuestas en las imagen anterior, existen otras teselaciones más complejas. Para los rombos y el trapecio existe otra forma de recubrir el plano, partiendo de un punto central y siguiendo una forma de estrella, como se puede observar en la imagen 5.

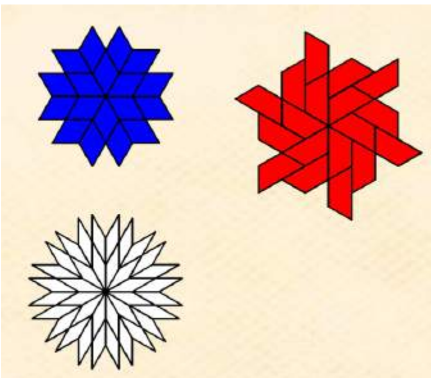

Imagen 5: Inicio de las teselaciones con punto central con los rombos y el trapecio

3.2 Mosaicos semiregulares con triángulos, cuadrados y hexágonos

Antes de empezar nuestro estudio, fijaremos la notación que vamos a utilizar para clasificar los diferentes mosaicos semiregulares que vayan apareciendo. Por ejemplo, en el caso de los mosaicos regulares, los recubrimientos formados por triángulos equiláteros se denotarán por 3-3-3-3-3-3, donde cada 3 corresponde a un triángulo equilátero, y el orden en el que aparecen dichos números hace referencia a como se unen dichos polígonos siguiendo el sentido horario.

Después de observar que con cada una de las diferentes piezas de *pattern blocks* se puede teselar el plano, la pregunta que nos planteamos a continuación es:

¿Usando únicamente figuras regulares, se puede construir un mosaico "semiregular", en el que en los vértices siempre se junte la misma configuración de polígonos?

Para contestar esta pregunta, podemos empezar con las diferentes parejas que se pueden dar:

- Cuadrado y triángulo. Para formar un ángulo completo con ángulos de 90º y 60º, tenemos únicamente la posibilidad de tener dos cuadrados (180º) y tres triángulos (180º). Podemos llegar a la conclusión de que únicamente hay dos configuraciones posibles:
  - El mosaico semiregular 3-3-3-4-4, llamado también mosaico triangular alargado, donde en cada vértice se juntan dos cuadrados unidos por un lado, y tres triángulos formando un ángulo de 180º. Este mosaico se puede observar en la imagen 6.

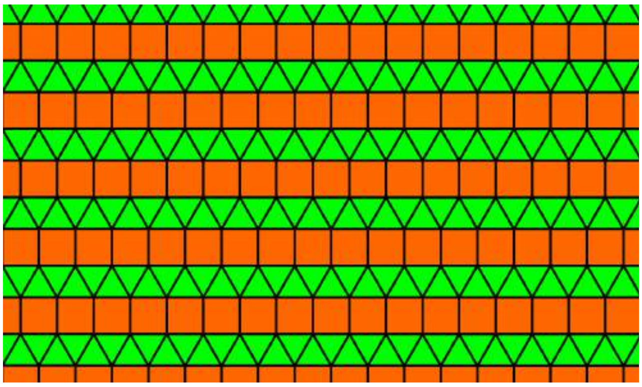

Imagen 6: mosaico semiregular 3-3-3-4-4

  - La segunda opción es el mosaico semiregular 3-3-4-3-4, llamado también mosaico cuadrado chato. En este mosaico se pueden observar simetría axiales y simetrías rotacionales de 90º. Este mosaico está representado en la imagen 7.

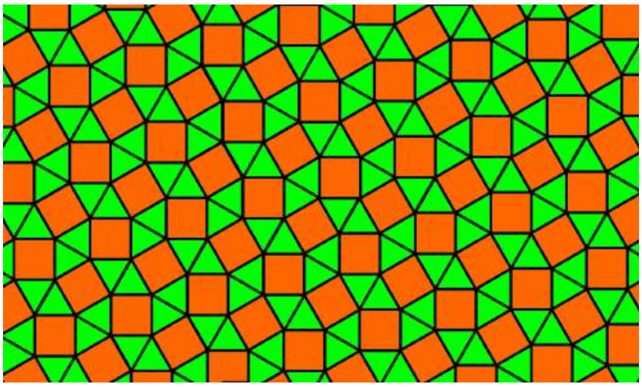

Imagen 7: mosaico semiregular 3-3-4-3-4

- Hexágono y triángulo. En esta ocasión, hay dos posibilidades también:
  - El mosaico semiregular 3-6-3-6, conocido también como mosaico trihexagonal, que se puede observar en la imagen 7.

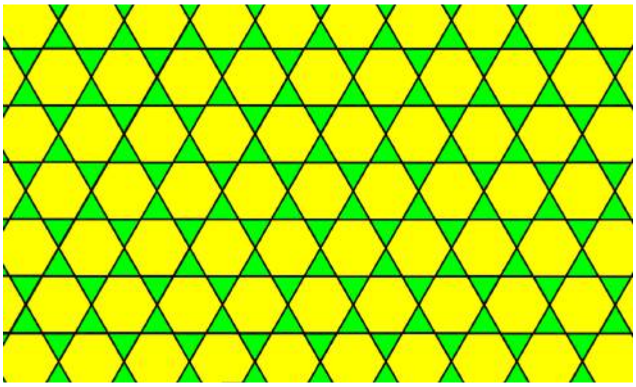

Imagen 8: mosaico semiregular 3-6-3-6

- ○ El mosaico semiregular 3-3-3-3-6, en el que en cada vértice se unen cuatro triángulos equiláteros y un hexágono. Este mosaico se puede ver en la imagen 9.

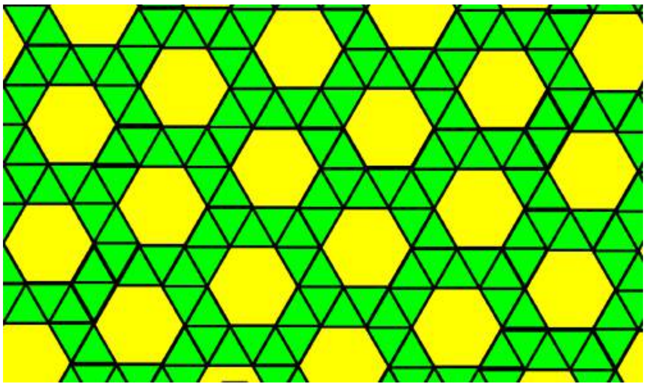

Imagen 9: mosaico semiregular 3-3-3-3-6

- Cuadrado y hexágono. Con estas piezas no se puede conseguir ningún mosaico semiregular, ya que la suma de los ángulos (120º y 90º) no puede dar 360º.

Usando las tres piezas regulares: triángulo, cuadrado y hexágono, se puede construir el mosaico 3-4-6-4, llamado también mosaico rombitrihexagonal, dibujado en la imagen 10.

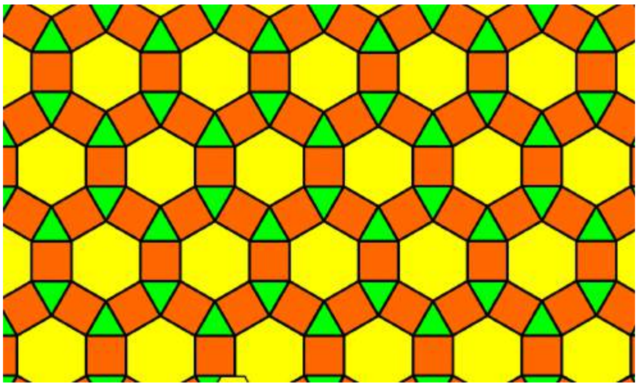

Imagen 10: mosaico semiregular 3-4-6-4

3.3 Otros mosaicos semiregulares

Después de construir los mosaicos semiregulares con triángulos, cuadrados y hexágonos, nos podemos preguntar si se pueden construir los demás mosaicos semiregulares. Teniendo en cuenta que con las figuras de *pattern blocks* se puede construir un dodecágono regular, de la lista conocida de mosaicos semiregulares [1] también se pueden construir dos mosaicos más:

- El mosaico 4-6-12, llamado trihexagonal truncado, que se puede ver en la imagen 11.

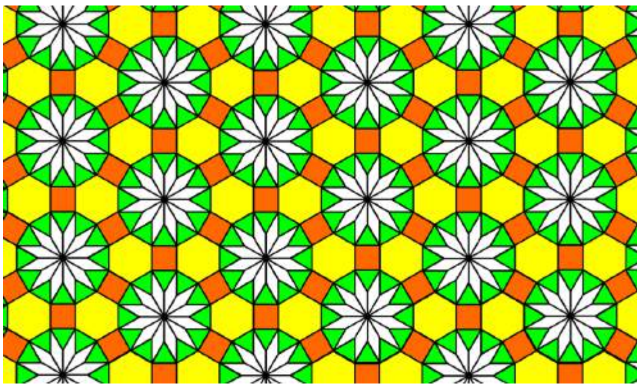

Imagen 11: mosaico semiregular 4-6-12

- Dodecágono, triángulo y dodecágono 3-12-12. Este mosaico semiregular recibe el nombre de mosaico hexagonal truncado, que se puede observar en la imagen 12.

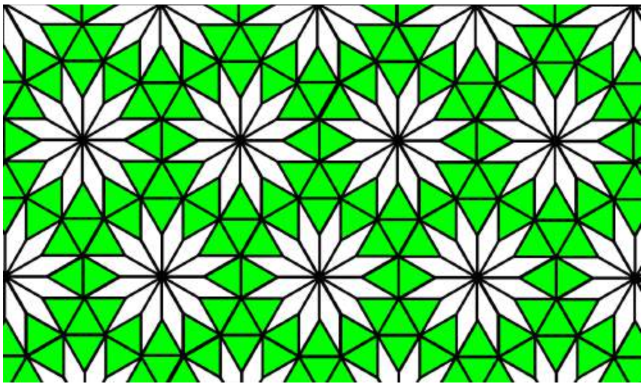

Imagen 12: mosaico semiregular 3-12-12

Por lo que respecta al mosaico 4-8-8, no se puede construir con *pattern blocks*, ya que el octógono no se puede formar con las figuras. A partir de los ángulos interiores de las figuras, que tienen por ángulos interiores 30º, 60º, 90º, 120º y 150º, no se puede construir un ángulo de 135º.

3.4 Otros mosaicos y ampliaciones

Otros mosaicos que se pueden construir con *pattern blocks* van desde el clásico mosaico con los dos rombos y el cuadrado, que da la sensación de tridimensionalidad (dibujado en la imagen 13), hasta otros más elaborados y complejos (ver imagen 14).

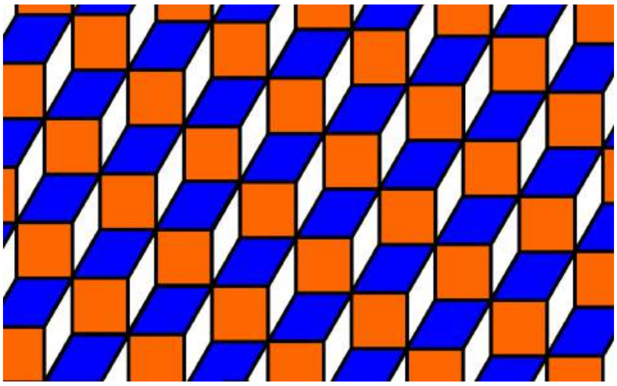

Imagen 13: mosaico con cuadrados y rombos

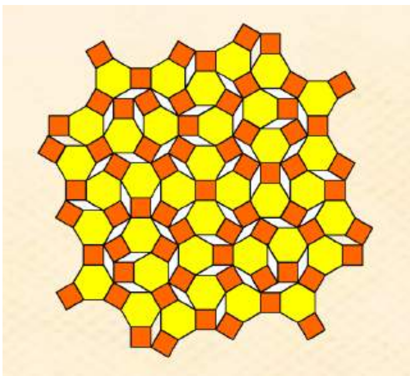

Imagen 14: mosaico más complejo, partiendo de un motivo central

Como ampliación en la construcción de mosaicos, un problema que se puede plantear es elaborar un mosaico siguiendo una serie de restricciones: partiendo de un centro establecido, usando únicamente dos, tres o cuatro figuras diferentes...

4. Actividades a realizar

Después de lo mostrado en las secciones anteriores, a continuación se proponen una serie de actividades que se discutirán en el taller. Estas actividades serán planteadas, resueltas y analizadas en función del nivel y objetivos.

Actividades de familiarización con el material

- Construcción de figuras libres y guiadas.
- En el caso de construcciones guiadas, se proporcionarán diferentes modelos, más o menos complejos a realizar en diferentes etapas:
  - Con modelos a medida, con figuras coloreadas.
  - Con modelos a medida, con figuras sin color.
  - Con modelos a medida, solo el contorno.

Actividades de clasificación y medida

- ¿Cómo podemos clasificar el material? Color, número de lados, perímetro, superficie, ángulos internos...
- ¿Podemos medir los ángulos internos de cada una de las piezas que componen *pattern blocks*? ¿Cómo se puede hacer sin instrumentos de medida?
- Tomando como unidad de superficie un triángulo equilátero, ¿es posible calcular el área del resto de las figuras?
- Tomando como unidad de superficie el cuadrado, ¿es posible calcular el área del resto de las figuras?
- Si tomamos como unidad de longitud el lado del triángulo equilátero, ¿qué perímetro tendrían el resto de las figuras?
- Tomando como unidad angular el ángulo interno del triángulo equilátero, ¿podemos determinar la medida de los ángulos internos del resto de las figuras?

Actividades sobre construcción de mosaicos

- Recordaremos qué entenderemos por mosaico, mosaico regular y semiregular. Se propondrán actividades libres de construcción de mosaicos a partir de las definiciones dadas.
- ¿Qué tipo de mosaicos se pueden construir usando reiteradamente un único tipo de pieza? ¿Y con dos? ¿Y con tres?
- Se propondrán diferentes mosaicos con la intención de descubrir el patrón de regularidad: partiendo de pocas piezas, completarlo.
- A partir de una superficie cerrada prefijada (hexágono, triángulo…), es posible rellenarla usando alguno de estos mosaicos?

Pattern blocks en digital

- Presentaremos diferentes applets y aplicaciones que simulan *pattern blocks*, y resolveremos algunas de las actividades anteriores con dichas aplicaciones.

5. Conclusiones

En este taller se han visto algunos de los mosaicos que se pueden elaborar con *pattern blocks*. Partiendo del análisis de los ángulos interiores de las figuras que lo componen, se puede ver que con este material es posible la construcción de todos los mosaicos regulares y siete de los ocho mosaicos semiregulares. Además, por la propia geometría de las piezas, es posible teselar el plano usando un solo tipo de ellas.

Finalmente, del análisis efectuado en la construcción de los mosaicos, podemos ver que este material se puede adaptar a todos los niveles educativos debido a la cantidad de problemas que se pueden proponer y a la facilidad con que se pueden graduar los mismos.

Bibliografia

[1] Wikipedia (2015): "Tiling by regular polygons". Enlace: http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling_by_regular_polygons

[2] Gregg, Simon (2013): "How your patter grows?". Blog Seek Echo. Enlace: http://seekecho.blogspot.com.es/2013/01/how-your-pattern-grows.html

[3] Picciotto, Henri (1999): "Geometry Labs. Activities for grades 8-11". Disponible online: http://www.mathedpage.org/geometry-labs/gl/geometry-labs.pdf