

Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico

Victòria Oliu Subiranas

email: voliu@xtec.cat

INS La Bisbal d'Empordà, La Bisbal d'Empordà – Girona

RESUMEN

Los problemas de los concursos de matemáticas forman un valioso conjunto de recursos didácticos que debemos aprovechar como se merece.

Esta ponencia se centra en los concursos más populares: el CANGURO y las primeras fases de la Olimpiada de 2º de la ESO, que en Cataluña se llama "Fem Matemàtiques". Puesto que la mayoría de comunidades participan en estos concursos, podemos encontrar enunciados en la lengua que corresponde.

Veremos cómo encontrar los enunciados en Internet y cómo llevarlos al aula, en la que tenemos diversidad de alumnos, con ejemplos de propuestas didácticas previas a la resolución de algunos de los problemas.

Finalmente presentaré una idea de proyecto, cuyo objetivo es facilitar la utilización didáctica de todo este valioso material, animando a los presentes a aportar ideas y a colaborar en el mismo.

Palabras clave: problemas, concursos, metodología, diversidad, motivación, colaboración.

Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico

Introducción:

Antes de empezar pido humildemente perdón por mi atrevimiento con esta ponencia de menos de una hora, que es muy poco, para tratar cuestiones que requieren mucho tiempo de estudio y de reflexión, y además, con una audiencia muy experta en el tema.

Intentaré sintetizar, hacer referencia a algunos de mis grandes maestros, y, sobre todo, pasar un buen rato con algunos problemas interesantes.

¿Para qué sirve resolver problemas?

¡A mí también me gustan los problemas! como dice José Ángel Murcia en su conferencia TED de enero pasado[1]. Según Tocamates, resolver problemas sirve para:

- Entender que puede haber más de una solución
- Entender que la creatividad juega un importante papel en las matemáticas
- Hacernos mejores también en otras cosas
- Entender al mundo
- Cambiarnos la vida

Me gustó esta conferencia TED. A mí los problemas de matemáticas me gustan desde siempre. En el colegio, mi maestra proponía un problema a toda la clase y nos decía: “No lo resolváis, solamente pensad cómo lo haríais”. Después de unos minutos de reflexión individual, explicábamos al resto de la clase lo que habíamos pensado. Quizá esto me llevó a estudiar matemáticas y a hacer de su enseñanza mi profesión. Obtuve mi licenciatura en matemáticas en 1980. Resolver problemas me cambió la vida.

¿Cómo se aprende a resolver problemas?

¿Quién no conoce el clásico *best seller* de 1944 “How to solve it” de George Polya[2]? Un libro plenamente vigente. Su propuesta metodológica para resolver problemas se resume en cuatro fases:

- “Understanding the problem” Comprender el problema
- “Divising a plan” Diseñar un plan
- “Carrying out the plan” Ejecutar el plan
- “Loking back” Volver al principio

En la primera parte, “In the classroom”, ya encontramos buenos consejos para el profesor acompañados de ejemplos y sobre todo de muy buenas preguntas. Mucho más importante que dar respuesta es hallar las preguntas adecuadas y dejar trabajar al alumno de la manera más independiente posible. Este es un libro de lectura obligada para cualquier futuro profesor de matemáticas.

¿Qué hacemos en clase de matemáticas?

Otra lectura impactante: El artículo de Paul Lockhart “El lamento de un matemático” de 2002[3]. Si alguien no lo ha leído que lo busque por Internet. Parece escrito hoy mismo. Se lamenta de la falta de matemáticas en clase de matemáticas, replantea todo lo que se hace tradicionalmente en el aula, y reivindica la resolución de problemas auténticos para hacer matemáticas y pasarlo bien en clase.

Como a mí me gustan los problemas, a finales de los 90 empecé a llevar alumnos al “Fem Matemàtiques” y a colaborar en la organización del concurso. Allí, en la asociación organizadora de mi provincia, ADEMG, conocí entrañables compañeros de profesión y grandes maestros como Maria Antònia Canals, Anton Aubanell, Xavier Valls, y tantos otros, a los que guardo un profundo respeto y agradecimiento por todo lo que me enseñaron y sigo aprendiendo con ellos.

¿Qué nos mandan hacer en clase de matemáticas?

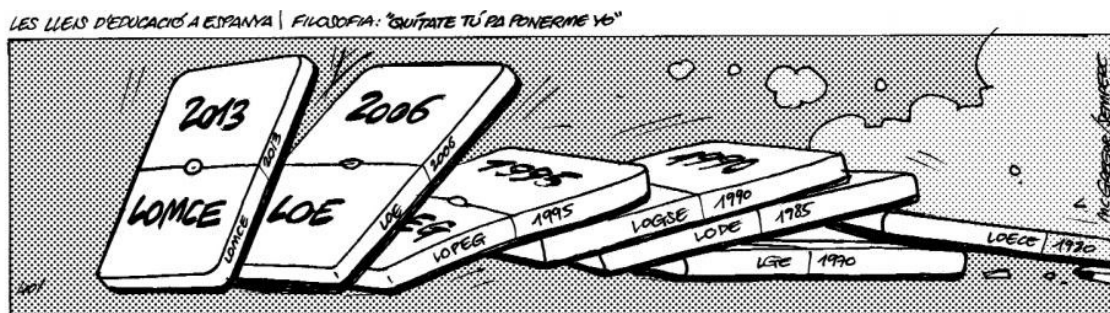


Ilustración 1: La sucesión de las leyes educativas

El tiempo pasó volando desde los noventa, siguiendo la sucesión de nuevas leyes educativas cada vez que cambia el color del gobierno.

Según el documento de competencias básicas de 2013 del Departament d'Ensenyament[4] (en el momento de escribir esta ponencia, estamos a la espera de la publicación del nuevo currículo de 2015), las competencias matemáticas se agrupan en cuatro ámbitos o procesos que son:

- Resolución de problemas
- Razonamiento y prueba
- Conexiones
- Comunicación y representación

Vemos que la resolución de problemas forma parte de un ámbito competencial, y además sabemos que puede ser en sí misma una actividad competencial que pone en juego casi todas las competencias básicas, no solamente las matemáticas. Pero como diría Maria Antònia Canals, “¿Y a mí que me importan las leyes?” La educación no trata de leyes, sino de entusiasmo por aprender, lo cual no se puede legislar. Esperemos que la entrada en vigor de la siguiente ley, no nos distraiga de la labor.

Los problemas de los concursos

Vista la introducción pasamos a lo que nos interesa: vamos a los problemas.

¿Qué es un problema? y ¿Qué es resolver problemas?

Son preguntas no triviales a las que algunos compañeros han dado respuesta con tesis doctorales y trabajos de licencia de estudios. Por ejemplo Antoni Vila[5]: <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/199697/resums/vila.htm>.

Antes de continuar propongo asumir la definición de problema dada por Antoni Vila en su trabajo de licencia por estudios¹:

“Conjunto de circunstancias y factores enunciados de forma verbal, gráfica o

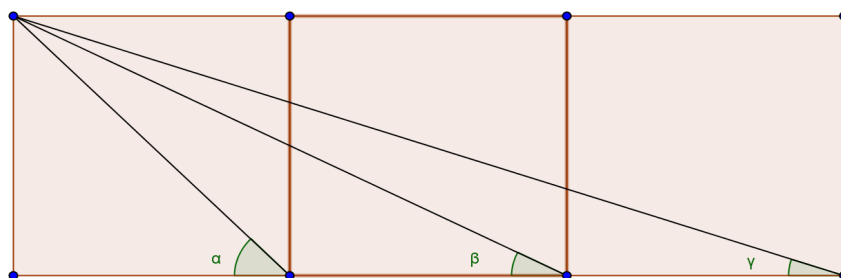
¹ Una especie de año sabático para hacer un estudio, que los profesores podían solicitar en Cataluña, antes de la crisis.

simbólica en el que hay un propósito, de forma implícita o a partir de una formulación propia posterior, del cual se desconoce un camino evidente para alcanzarlo.”

Creo que esta definición se ajusta muy bien a los enunciados de los problemas de concursos de matemáticas y que resolver problemas de estas características es nada más y nada menos que “hacer matemáticas”.

Es importante la teoría y la reflexión, pero los que estamos a pie de aula necesitamos ser prácticos y disponer de material contrastado y preparado para trabajar eficazmente con los alumnos.

Veamos un ejemplo de problema:



$$\alpha + \beta + \gamma = ?$$

Ilustración 2: ¿Problema o ejercicio?

La pregunta de la ilustración 2, para alumnos de bachillerato, puede ser un simple ejercicio de cálculo. Pero para alumnos de la ESO la pregunta pasa a ser un problema auténtico.

Os propongo resolverlo usando solamente conocimientos propios de los primeros cursos de la ESO.

Aquí vemos la importancia, en la definición de problema, de “desconocer un camino evidente para alcanzar el propósito”.

¿Cuáles son los principales concursos que nos nutren de problemas?

En Cataluña tenemos actividades y concursos diversos para alumnos desde primaria hasta bachillerato: el Canguro, la Copa Canguro, los “problemes a l'esprint”, la maratón de problemas, el +mates, las Olimpiadas de 2º de la ESO y también de bachillerato, el “Ven por más matemáticas”, el proyecto ESTALMAT. También en algunos centros se organizan concursos de problemas semanales, o el problema del mes. Ahora vamos a centrarnos en los problemas del Canguro y del “Fem Matemàtiques”.

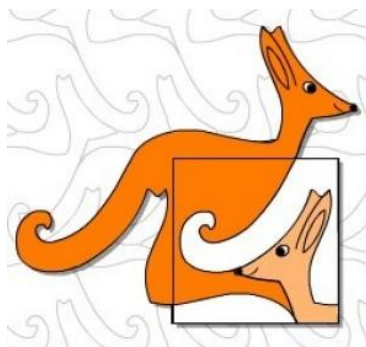


Ilustración 3: El logo de las Pruebas Canguro

El muy conocido CANGURO es una fuente de problemas interesantes y originales

cada año. La prueba CANGURO en Cataluña está organizada por la SCM la cual este año ha extendido el concurso hasta los dos últimos cursos de primaria, con el apoyo del Departament d'Ensenyament, alcanzando un gran éxito de convocatoria: 18000 participantes de primaria y 25000 participantes de la ESO y de bachillerato.



Ilustración 4: "Fem Matemàtiques"; "Hagamos matemáticas"

El "Fem Matemàtiques" es otra fuente inspiradora de problemas auténticos. Este concurso está convocado por la FEEMCAT², que viene a ser la FESPM³ catalana, y viene coordinado cada año por una de las asociaciones federadas que se van turnando en esta labor.

La estructura en tres fases del "Fem Matemàtiques" permite participar en la actividad a todos los alumnos, desde el último curso de primaria hasta segundo de la ESO.

La primera fase del "Fem Matemàtiques" se celebra en los centros con una propuesta de tres problemas publicados en la web para resolver en grupo en el aula con tiempo para elaborar un informe de resolución completo.

La segunda fase del "Fem Matemàtiques" se celebra desde cada asociación federada y consiste en una jornada matemático-festiva con un prueba individual, pruebas por equipos y actividades lúdicas.

En la fase final se seleccionan los alumnos ganadores de Cataluña y consiste en otra jornada con una estructura parecida a la de la segunda fase. Los ganadores de segundo de la ESO representan a Cataluña en la Olimpiada Matemática de la FESPM.



Ilustración 5: Final FM - Reus 2014

2 Federación de Entidades para la Enseñanza de las Matemáticas en Catalunya

3 Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

La participación en el “Fem matemàtiques” ha seguido una sucesión creciente desde el primer año, en 1995, en que participaron 465 alumnos de Reus y de Girona. En el 2006 la participación fue de 5000 alumnos de toda Cataluña (un aumento del 975% en 11 años). El año pasado participaron 8656 alumnos (un aumento del 73% en 8 años) y este año 2015 hemos tenido 10689 participantes de toda Cataluña (un aumento del 23,5% en un año). El concurso goza de muy buena salud.

¿Dónde podemos encontrar los problemas de los concursos?

En Cataluña tenemos toda la información, enunciados y soluciones del CANGURO en la web de la SCM: www.cangur.org, gracias a la labor del profesor Antoni Gomà. Con ayuda de Google podemos encontrar los enunciados en castellano publicados por otras sociedades de profesores de matemáticas.

Los problemas de la primera fase del “Fem Matemàtiques” se publican todos los cursos, a principios de noviembre, en la web fm.feemcat.org. Los problemas de las segundas fases y fases finales son publicados en las páginas web de las asociaciones correspondientes, y por ello no son fáciles de encontrar.

Algunas sociedades de profesores de la FESPM cada año publican libros con los problemas de sus concursos y casi todas ellas publican también los enunciados en sus respectivas páginas web.

Por ejemplo, con ayuda de Google, pude encontrar los enunciados de catorce años de Olimpiadas de la ESO de la sociedad asturiana Agustín de Pedrayes: <http://www.pepe.jupenoma.es/olimpiada/olimpiada.htm>.

Algunos problemas del CANGURO de 2015 en Cataluña

La prueba CANGURO está diseñada para pensar y responder rápidamente. Pero sería un desperdicio no aprovechar en clase estos problemas para razonar, representar, modelizar, comunicar, en definitiva, para hacer matemáticas en clase de matemáticas.

Es muy difícil escoger entre tantos problemas bonitos, así que me he limitado a seleccionar algunos entre los de la última edición del concurso.

Ejemplo 1 (4º ESO)

Cuando hablamos de áreas, tradicionalmente los alumnos asumen que habrá que aplicar alguna fórmula y calcular. El siguiente problema es un ejemplo de cómo darle la vuelta a esta creencia de los alumnos:

Doblamos un ángulo de un cuadrado haciendo que el vértice coincida con el centro, obteniendo un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son números enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?

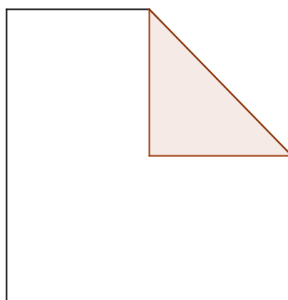


Ilustración 6: área del cuadrado

La dificultad más importante de este problema para los alumnos es el concepto de

números enteros consecutivos. Aclarado esto, y olvidando las fórmulas, se puede visualizar la parte del cuadrado que corresponde a la diferencia entre las dos áreas y, cortando adecuadamente el cuadrado en partes iguales, la respuesta resulta inmediata.

Ejemplo 2: (4º ESO)

Las edades de Ana, Biel, Cinta y David son 3, 8, 12 y 14 años, en algún orden. La suma de las edades de Ana y David es múltiplo de 5 y la suma de las edades de David y Cinta es también múltiplo de 5. ¿Cuál es la suma de las edades de Biel y David?

¿Vamos a resolverlo? No es muy difícil.

Ejemplo 3: (4º ESO)

Mercedes pregunta a cinco alumnos cuántos de ellos estudiaron el día anterior. A pesar de que todos saben quien ha estudiado y quien no, Pol responde: "Ninguno"; Berta dice "Solamente uno"; Ona: "Exactamente 2"; Eugenio: "Exactamente tres" y Gerardo: "Exactamente cuatro". Mercedes sabe que quien ha estudiado dice la verdad mientras que quien no ha estudiado miente. ¿Cuántos alumnos han estudiado el día anterior?

¿Lo vemos todos? Facilito también. Ahora que la lógica ha desaparecido de las matemáticas escolares, es el momento de devolverla al aula con los problemas.

Ejemplo 4: (Segundo de Bachillerato)

Marcamos unos cuantos puntos en una recta. Consideramos todos los segmentos determinados por estos puntos. Uno de ellos se encuentra en el interior de 80 segmentos y otro es interior a 90 segmentos. ¿Cuántos puntos hemos marcado?

Es posible averiguar la respuesta con solo estos datos! Pensad cómo lo resolveríais. Veréis que implica más cosas además de geometría. Un problema bonito!

Algunas propuestas para llevar los problemas del CANGURO al aula

Trabajo individual con puesta en común:

Estos problemas se pueden trabajar individualmente, imitando el formato del concurso, pero con solamente diez problemas por sesión de clase, que a "velocidad Canguro" deberían resolverse en 15 minutos. Yo les doy más tiempo a mis alumnos para que escriban sus reflexiones individualmente, unos 30 minutos. El resto de la sesión de clase la dedicamos a la puesta en común y discusión de estrategias.

Concurso por equipos:



Ilustración 7: Alumnos de 4º de la ESO trabajando

Es mucho más interesante trabajar en grupos de dos o tres alumnos, también en forma de concurso, porque esto es muy motivador para determinados grupos de clase. En este caso hago dos o tres copias de los problemas y recorto los enunciados para separar cada problema, dejo los recortes sobre la mesa del profesor y un alumno de cada grupo escoge un problema o dos para resolver. Cuando ya no necesitan el enunciado lo devuelven a la mesa y escogen otro problema. Por supuesto, gana el equipo que logra resolver correctamente más problemas.

La discusión posterior de los problemas nos da mucha información sobre cómo piensan y cómo aprenden los alumnos y nos permitirá mejorar nuestra intervención en clase.

Aquí tenemos un documento con problemas del Canguro de 2009 resueltos por alumnos de cuarto de la ESO durante el curso pasado.

Algunos problemas del “Fem Matemàtiques”

La mayoría de estos problemas están bien contextualizados, corresponden a problemas reales, o bien proceden de juegos con carga matemática. En este caso he seleccionado unos cuantos problemas históricos, que a mi me gustan especialmente.

Problema de la primera fase. 1995

La próxima edición del campeonato interplanetario de bicicleta de montaña se celebrará en un circuito, el cual nos han encargado marcar. El reglamento establece que la longitud del circuito no puede ser inferior a 5600m ni superior a 5700m.

Después de marcar el circuito nos disponemos a comprobar que se ajusta al reglamento. Para ello disponemos de una bicicleta equipada con un cuentakilómetros. Tomamos nota de que el contador marca 0417 y damos una vuelta al circuito. Al acabar la vuelta el contador marca 0423. Insatisfechos, damos una nueva vuelta y ahora el contador marca 0428. Vamos dando vueltas al circuito obteniendo estos resultados: 0434, 0439, 0445, 0451, 0456, 0462, 0468, 0473 y 0479. Cansados después de once vueltas, nos preguntamos si tenemos datos suficientes para asegurar que el circuito se ajusta al reglamento.

Notas:

a) *El cuentakilómetros funciona perfectamente. El problema es que solamente cuenta kilómetros y no aprecia fracciones de kilómetro.*

b) Al empezar las vueltas el contador marcaba 0417. Ello no significa que llevara exactamente 417 kilómetros, sino que podía llevar 417km y algunos metros más, sin llegar a 418km.

Problema de la primera fase. 1996

Un hotel tiene 100 habitaciones y 100 camareros. Los camareros tienen una costumbre un poco loca que consiste en lo siguiente: El primer camarero cierra todas las puertas de las habitaciones. El segundo camarero abre las puertas de las habitaciones de número par. El tercer camarero cambia la posición de todas las puertas de número múltiplo de 3. El cuarto camarero cambia la posición de todas las puertas de número múltiplo de 4. El quinto camarero cambia la posición de todas las puertas de número múltiplo de 5... Y así hasta que han pasado todos los camareros. Averigua cuáles son las puertas que quedan cerradas al final.

Problema de la primera fase. 1997

Encendemos a la vez dos velas de la misma altura pero diferente grosor. Sabemos que una se consumiría en 4h y la otra en 5h. Cuando las apagamos observamos que una es cuatro veces más alta que la otra. Averigua cuanto tiempo han estado encendidas.

Problema de la primera fase. 2012 (resumen)

Vamos a jugar en grupos de dos con 20 fichas cada grupo. Cada jugador en su turno puede coger 1, 2 o 3 fichas. Pierde quien coge la última ficha.

a) *¿Hay alguna cantidad de fichas que te gustaría encontrar cuando te toque jugar? ¿Qué cantidad de fichas no te gustaría encontrar porque entonces ya sabrías que has perdido?*

b) *¿Quién tiene ventaja, el jugador que empieza la partida o el segundo?*

c) *¿Si juegas correctamente, puedes ganar siempre? Explica cómo lo harías.*

d) *¿Cómo cambian las condiciones del juego si se pueden coger hasta 4 fichas?*

e) *¿Y si jugamos con 21 fichas y podemos coger hasta 3 en cada jugada? ¿Y si podemos coger hasta 4?*

Aquí tenemos un documento con el informe de resolución de este problema hecho por alumnos de segundo de la ESO.

Alguna propuesta de aula para trabajar los problemas del “Fem Matemàtiques”

Los alumnos de los primeros cursos, o de cualquier curso, que no tienen hábito de trabajar con problemas auténticos, necesitan acostumbrarse al ambiente de resolución de problemas.

Una manera de resolver esta situación consiste en proponer actividades previas transformando poco a poco el estilo de preguntas que los alumnos se van encontrando, ayudando con nuevas preguntas y algunos ejemplos de procedimientos.

Aquí tenemos un documento del departamento de matemáticas del instituto Vicens Vives de Girona, del 2012, con actividades de aula de dificultad progresiva, para trabajar los problemas del estilo “Fem matemàtiques”.

Otras fuentes de problemas interesantes. Más ejemplos.

Los siguientes problemas han sido compartidos a través de Twitter, y tienen diversas procedencias. Algunos son parecidos a los del Canguro, en contexto propiamente matemático:

Partes iguales:

En las ilustraciones 8 y 9 tenemos un par de problemas conocidos, que siempre interesan a los alumnos:

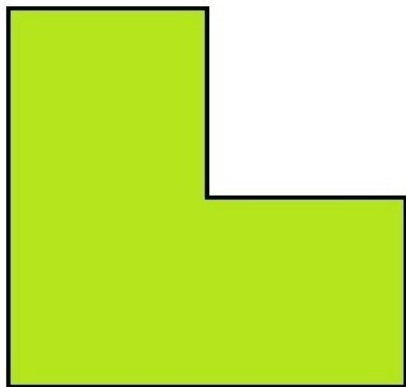


Ilustración 8: Divide en 4 partes iguales

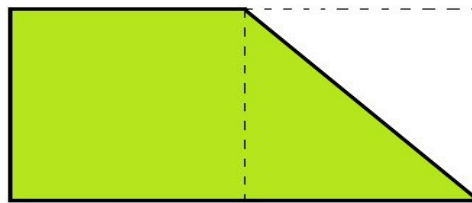


Ilustración 9: Divide en 4 partes iguales

Ángulos:

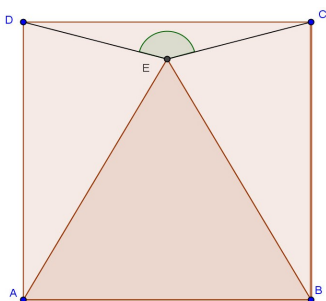


Ilustración 13: ¿Cuánto mide el ángulo marcado en verde?

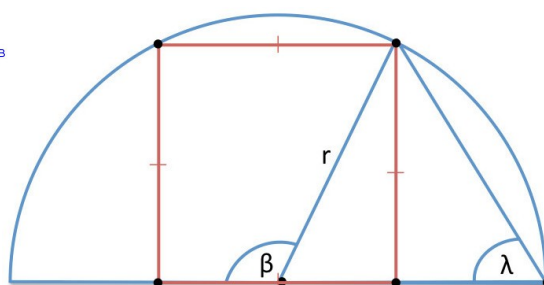


Ilustración 14: Halla los ángulos

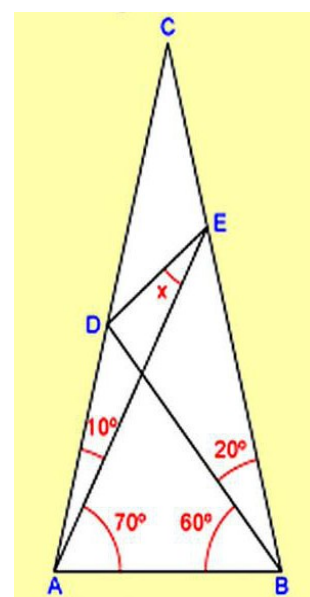


Ilustración 15: encuentra x

En la ilustración 13 tenemos un cuadrado con un triángulo equilátero dentro. Si los alumnos no conocen la suma de los ángulos de un triángulo, deberíamos proponer su cálculo como problema previo. En esta figura podemos ver que aparecen triángulos isósceles. Algunos alumnos se dan cuenta en seguida. Puede ser necesario preguntar cómo se pueden calcular los ángulos de un triángulo isósceles, conociendo uno de ellos. La idea de simetría en un triángulo isósceles es sencilla, bonita y muy útil.

En la ilustración 14 interviene la idea de ángulo central y de ángulo inscrito. Podemos preguntar que relación hay entre ambos.

El cálculo exacto requiere nociones de trigonometría, pero quizá a alguien se le ocurre una idea más elemental para resolverlo.

El problema de la ilustración 15 me llevó de cabeza durante semanas. Es fácil encontrar el valor de x usando GeoGebra. Pero la pregunta es: “¿por qué es este el resultado?”. Todavía no estoy segura de haber hallado la respuesta.

He estado planteando este problema a todos los profesores de matemáticas que se me cruzan en mesas de restaurantes. Así, pues, si después nos encontramos comiendo, que sea en manteles de papel!

Áreas:

En las ilustraciones 10, 11 y 12 tenemos tres estilos diferentes, apropiados para cursos diferentes:

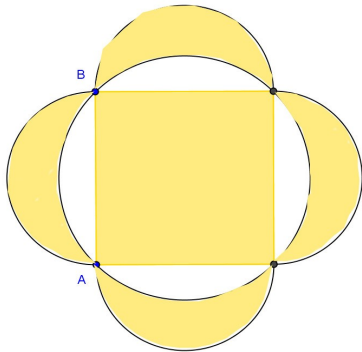
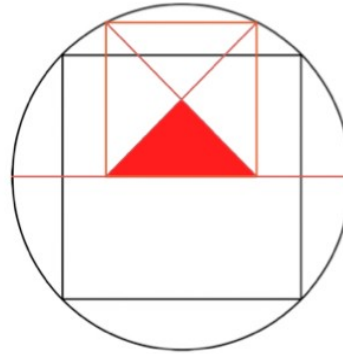


Ilustración 10: Calcula el área de la zona amarilla, sabiendo que el arco blanco AB=5cm



Prove that the area of the red triangle is 1/10 the area of the black square.

Ilustración 11: ¿Que fracción del cuadrado negro representa el triangulo rojo?

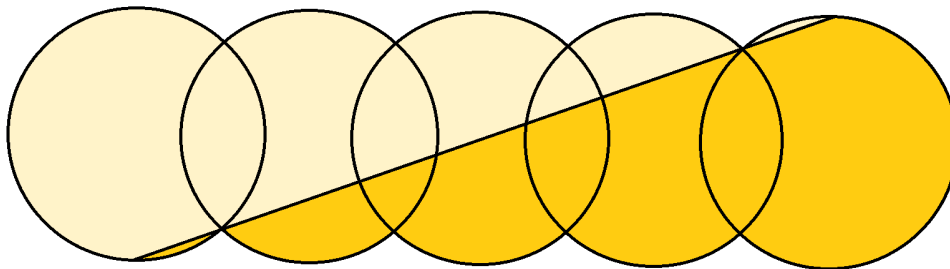


Ilustración 12: Los cinco círculos

Cinco círculos congruentes se solapan. Trazamos un segmento que une el punto inferior del primer círculo con el punto superior del quinto círculo. Pintamos de color dorado el área encerrada debajo de este segmento. Cada una de las cuatro intersecciones de dos círculos tiene área 5 y el área dorada vale 35. Encontrad el área de un círculo.

Razones áureas:

En las ilustraciones 16 y 17 tenemos dos enigmas que despiertan nuestra curiosidad y esperemos que también la de nuestros alumnos. ¿Cómo aparece la razón áurea en estos dibujos? Vamos a calcular un poco. Y si no sale, siempre podemos comprobarlo con GeoGebra!

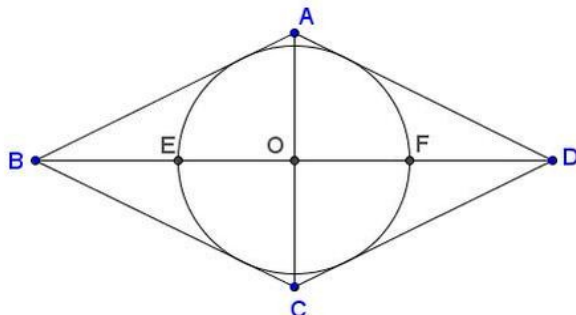


Ilustración 16: La diagonal mayor es doble de la menor. Comprueba que E-F-D están en razón áurea.

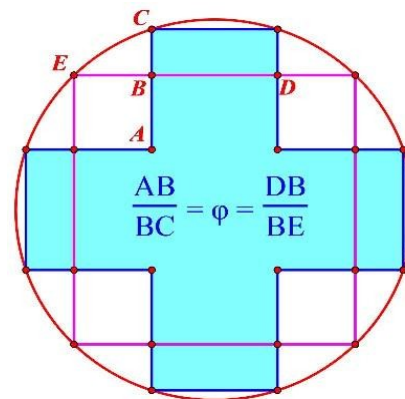


Ilustración 17: Cruz Áurea

Problemas virales:

Actualmente hay problemas que se propagan a través de las redes sociales y acaban siendo virales. Por ejemplo el famoso “Cumpleaños de Cheryl”:

Albert y Bernard se hacen amigos de Cheryl y quieren saber la fecha de cumpleaños de su nuevo amigo. Cheryl da de antemano una lista de 10 posibles fechas: el 15, 16 o 19 de mayo; el 17 o 18 de junio; el 14 o 16 de julio; o el 14, 15 o 17 de agosto. Sin embargo, y para mantener la ambigüedad de la adivinanza, le dice el mes y el día en que nació a Albert y a Bernard separadamente. Mientras que la conversación entre ambos es la que sigue:

-Albert: No sé cuándo es el cumpleaños de Cheryl, pero sé que Bernard tampoco lo sabe;

-Bernard: Al inicio no sabía cuándo es el cumpleaños de Cheryl, pero ahora lo sé;

-Albert: Por lo tanto yo también sé cuándo es el cumpleaños de Cheryl.

¿Cuándo es el cumpleaños de Cheryl?

Este enigma procede de una prueba para alumnos de 14 a 15 años en Singapur y apareció en la prensa el pasado mes de Abril. Es una delicia leer los comentarios de los internautas en las ediciones digitales. Esto es una prueba de que las matemáticas interesan más allá de las aulas y quizá a pesar de ellas.

Conclusión:

Hemos visto la importancia de la resolución de problemas en clase de matemáticas, como actividad competencial y como forma de dar sentido a las matemáticas, y quizá también a la vida.

Hemos visto que tenemos un conjunto de buenos problemas procedentes de concursos de matemáticas, que son un material valioso para las clases.

No obstante, para el profesor el problema principal es la localización y clasificación de los problemas para poder escoger los más adecuados para sus alumnos según los objetivos didácticos del curso.

Este tipo de material merece ser clasificado. Sería de gran utilidad disponer de una base de datos de problemas, procedentes de concursos o no, en formato digital, que permitiera generar listas según diversos criterios y dónde poder hallar distintos tipos de información de cada problema.

Sería interesante etiquetar los problemas por contenidos, por estrategias, por cursos, por origen... y adjuntar al problema ejemplos de resolución por parte de los alumnos.

Como el trabajo a realizar es inacabable, podríamos proponernos un objetivo alcanzable y hacerlo crecer con la colaboración de profesores y también de estudiantes de magisterio y de máster, aprovechando los trabajos de estos.

Una base de datos con estas características podría llegar a ser un recurso muy interesante para el profesorado que deberíamos mantener al margen de las oscilaciones de los currículos oficiales.

Aprovecho esta magnífica ocasión para lanzar la botella al mar con la esperanza de que llegue a buen puerto.

Soluciones de algunos de los problemas propuestos:

Problema de los 3 cuadrados:

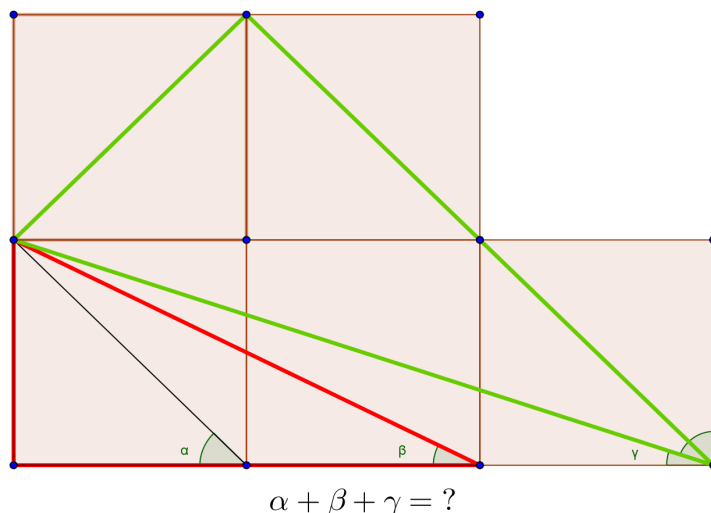


Ilustración 17: Solución para la suma de los tres ángulos

Ayudas: Para sumarlos vamos a poner los tres ángulos juntos en un mismo vértice. ¿Cuál de los vértices nos conviene escoger? En este vértice ya tenemos dos de los tres ángulos. ¿El tercero coincide con el que falta? Salgamos fuera de la figura inicial y dibujemos más cuadrados... Triángulos semejantes tienen ángulos correspondientes iguales, ¿verdad?

Problemas del Canguro :

Ejemplo 1: El área del cuadrado es igual a 8

Ejemplo 2: La suma de las edades de Biel y David es 26

Ejemplo 3. Solamente Berta dice la verdad

Ejemplo 4: Hemos marcado 22 puntos en la recta

Problemas del “Fem Matemàticas”:

Problema de 1995: para resolver el problema se puede construir una tabla indicando para cada vuelta el número del marcador, la distancia recorrida si el circuito tiene la longitud mínima y la distancia recorrida si el circuito tiene la longitud máxima.

Problema de 1996: Este problema tiene dos partes: encontrar los números “a lo bruto” y darse cuenta que son los cuadrados perfectos. Pero habrá que razonar por qué tienen que ser los cuadrados perfectos. Para ello hay que darse cuenta de que las puertas cerradas van a ser las que tienen un número impar de divisores. Visto esto, hay que conectar las dos cosas: identificar los números cuadrados por su número de divisores.

Problema de 1997: 3h 45min. Los alumnos pueden jugar con fracciones o bien asumir una altura concreta para las velas y hacer una tabla de valores con el tiempo y las alturas sucesivas.

Problema de 2013: Los alumnos que llegan a la solución correcta suelen haber jugado con las fichas dispuestas en filas de 4, o de 5, dependiendo de si podemos coger hasta 3 fichas, o hasta 4 fichas, respectivamente. Una vez visto el truco, ya no hace falta poner las fichas en filas para jugar “correctamente”.

Otros ejemplos de problemas:

(De las webs de “Solve My Math”, “Cut the knot” y otras)

Ilustración 13: 150°

Ilustración 14: El segundo ángulo es la mitad del primero y el primero mide $180 - \text{arctangente de } 2$.

Ilustración 15: $x=20^\circ$

Ilustración 10: El área es igual a dos círculos pequeños, más dos cuadrados, menos el círculo mayor.

Ilustración 12: Cada círculo tiene Área 5.

Ilustración 16: Suponiendo que las diagonales miden 2 y 4, por semejanza de triángulos hallamos el radio del círculo: $2/\sqrt{5}$ i calculando ED/EF obtenemos $(1+\sqrt{5})/2$.

Ilustración 17: Una solución en

<http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenCross.shtml>

“El cumpleaños de Cheryl” es el 16 de Julio.

Referencias bibliográficas:

[1] Murcia, José Ángel (2015): “Me gustan los problemas”. Conferencia TED for Youth, Murcia (España). 20 minutos duración <<http://www.tocamates.com/gustan-los-problemas/>> consultado en Abril de 2015.

[2] Polya, George (1944): “How to solve it”. Princeton Science Library, edición de 1988, Princeton (USA).

[3] Lockhart, Paul (2002): “El lamento de un matemático”. La Gaceta de la RSME, volumen 11 (2008), número 4, páginas 737-766, Madrid (España).

[4] Grupo de trabajo coordinado por Carme Burgés y Jaume Serramona (2013): “Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic”. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya, Barcelona (España)

<http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf> consultado en Abril de 2015.

[5] Vila, Antoni (1997): “La Resolució de Problemes de Matemàtiques a l'ESO: Elaboració d'un material transversal, gestió de la classe i avaluació ”. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya, Barcelona (Espanya) <<http://www.xtec.cat/sgfp/licencias/199697/resums/vila.htm>> consultado en Abril de 2015.