UNA DOCENA DE PROBLEMAS

Santiago Fernández
(Asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao)

> *Lo que se puede enseñar es la actitud correcta ante los problemas, y enseñar a resolver problemas es el camino para resolverlos (...). El mejor método no es contarles cosas a los alumnos, sino preguntárselas y, mejor todavía, instarles a que se pregunten ellos mismos.*
>
> P. Halmos

No es necesario justificar a estas alturas la importancia de la Resolución de problemas en la clase de matemáticas. Simplemente diremos que es una actividad primordial en el aula. El saber hacer, en matemáticas, tiene mucho que ver con la habilidad de resolver problemas, de encontrar pruebas, de criticar argumentos, de usar el lenguaje matemático con cierta fluidez, de reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas, de saber aguantar una determinada dosis de ansiedad, pero también de estar dispuesto a disfrutar con el camino emprendido. Es una de las competencias básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas, y deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela. Es una habilidad que se puede enseñar. Las ventajas del enfoque basado en la resolución de problemas en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje son significativas por diversas razones:

a) Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las cuestiones con detenimiento, hacer pruebas, equivocarse, “perder el tiempo” investigando, pero también disfrutar con el camino emprendido.
b) Existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión de la materia por parte del alumnado.
c) Los alumnos se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de aprendizaje.
d) Posibilita la creación de estructuras mentales que trascienden a las propias matemáticas.
e) Al resolver problemas los alumnos se acercan a las verdaderas matemáticas.

1.-¿Cómo avanzar en la resolución de problemas?

Hay que tener presente que el único camino que existe para aprender a resolver problemas, y ser competente en este campo es enfrentarse a diversos problemas y tratar de resolverlos. Sin embargo, esto no es suficiente. El haber intentado resolver muchos problemas no garantiza que nuestra capacidad para resolver problemas aumente de manera considerable. Como dicen los matemáticos, es una condición necesaria pero no suficiente, ¿qué hacer para ser más eficaz resolviendo problemas?

Después de años de reflexión y de intentar varios caminos de cara a ayudar a los alumnos y las alumnas, propongo en esta comunicación el trabajo con 12 problemas que pueden ser representativos de cara a profundizar en la resolución de problemas. Los problemas propuestos son adecuados para plantearlos a estudiantes de la educación Secundaria Obligatoria, si bien alguno de ellos puede trabajarse en Bachillerato. Son situaciones muy

significativas, y bien elegidas, con las que queremos abarcar la mayoría de las estrategias heurísticas apropiadas a este nivel. Entre la docena de problemas, hay algunos que se pueden emplear "como aperitivo"; en ellos, se suele dar una respuesta rápida, intuitiva, aparecen situaciones de tipo gráfico o visuales, pertenecientes a una matemática informal. Se resuelven muchas veces empleando estrategias de bajo rango: ensayo-error, conteos simples, analogías, etc. El tiempo necesario para resolverlos suele ser corto, aunque no siempre es así; sin embargo, su posterior discusión y organización generalmente es el aspecto que más interesante. El objetivo es dar confianza y motivar a los alumnos con situaciones que puedan resolver y animarlos a que generen ideas (tanto en cantidad como en originalidad). En definitiva, son problemas pensados para resolver aún con poco conocimiento matemático. Otro tipo de problemas(los más comunes) persiguen el objetivo que los alumnos practiquen las estrategias y herramientas heurísticas, así como los modelos teóricos puestos a su alcance. Por último se propone una situación abierta, apropiada para plantearla en grupo, de manera que los alumnos exploren nuevos caminos, discutan, se organicen, etc.
En este tipo de situaciones abiertas, lo importante no es llegar a la solución, sino los procesos derivados del planteamiento, búsqueda y discusión de los distintos escollos, que lógicamente irán apareciendo.

2.-¿Cómo trabajar en la resolución de problemas?

Propongo algunos consejos-recomendaciones que conviene tener en cuenta antes de lanzarnos en clase a resolver problemas con nuestros alumnos y alumnas. Son recomendaciones para el profesor:

a. **Prepararse adecuadamente**. Significa tener contacto con el mundo de los problemas, leer artículos, libros, etc.
b. **Tener presente que el trabajo en Resolución de Problemas es lento**. Los frutos tardarán un tiempo en hacerse realidad.
c. **Explicar al alumnado en qué consiste el trabajo en Resolución de Problemas**. Dedicar alguna sesión haciendo ver a los alumnos qué supone trabajar con problemas, las ventajas e inconvenientes que ello implica, los objetivos que se persiguen, la importancia de resolver problemas, etc.
d. **Resolver algunos problemas en "voz alta"** . Sería muy deseable presentar varios problemas a los alumnos, y resolverlos delante de ellos; empleando diversos caminos y utilizando algún método(el método de G. Polya es quizás el más adecuado), utilizando las estrategias más convenientes, etc. De esta manera el profesor va trasladando a los alumnos y alumnas una manera de resolver problemas. Una manera de pensar.
e. **Preocuparse por presentar problemas interesantes** y capaces de generar un buen ambiente
f. Profundizar en las estrategias básicas y los contenidos más relevantes

3.-¿Qué aspectos influyen en la resolución de problemas?

De manera muy resumida siguiendo las indicaciones de **Kilpatrick J. (1987),** que para resolver problemas conviene disponer de :

1.- Un buen bagaje organizado de **conocimientos** en torno al contenido.
2.- Un buen bagaje de **procedimientos** para representar y transformar el problema.
3.- Un sistema que controle y guíe la selección de conocimientos y procedimientos.

Autores posteriores como **Mason, Burton, Stacey, Lester y Schoenfeld** añaden a los apartados anteriores un cuarto elemento que nos parece crucial.

4.- La confianza y el dominio de los estados emocionales y psicológicos (Inteligencia emocional)

4.-Contenidos y estrategias involucradas para resolver la mayoría de los problemas.

Estrategias		Contenidos fundamentales
De rango bajo y medio	**De rango alto**	
• Ensayo-error • Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo • Manipular y experimentar manualmente • Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar) • Resolver problemas análogos (analogía) • Hacer recuento (conteo) • Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación) • Experimentar y extraer pautas (inducir) • Seguir un método (organización) • Utilizar una expresión adecuada (codificar, expresión, comunicación). • Deducir y sacar conclusiones (razonar)	• Estrategias relacionadas con la demostración: inducción, etc. • Sacar partido de la simetría • Realizar conjeturas y probarlas o refutarlas. • Principio del palomar • Analizar los casos límite, • Teoría del color • Reformular el problema • Suponer que no (reducción al absurdo) • Empezar por el final (dar el problema por resuelto) • Conocer técnicas específicas de: números, azar, geometría, etc.	• Teorema de Pitágoras • Teorema de Thales,,semejanza • Conocimiento proporcional • Suma de términos de una progresión aritmética • Propiedades elementales de la circunferencia • Propiedades básicas de los triángulos • Relación entre las fracciones, números decimales y números racionales • Una cierta destreza en el manejo del lenguaje algebraico • Conocimiento de algunas propiedades numéricas …..

5.- Problemas propuestos

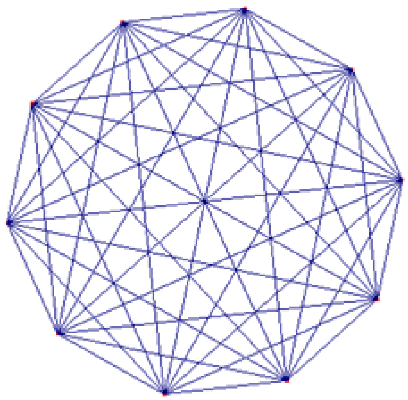
Problema 1

Una persona tiene en su bolsillo estas cinco monedas:
0,10€; 0,20€; 0,50€; 1€ y 2€;

¿Cuántas cantidades distintas puede formar?

Problema 2

Este diagrama se ha realizado uniendo entre sí, con segmentos, los 10 puntos del círculo. Cada punto está unido con todos los demás. Sin contarlos. ¿Sabrías cuántos segmentos hay en total?

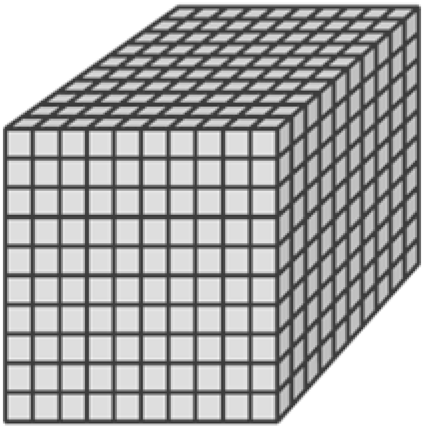


Problema 3

Adrian y Berta están en plena partida de un juego donde se tienen que conseguir 6 puntos para ganar, y en el que cada uno de los jugadores tiene las mismas oportunidades para vencer en una ronda y llevarse un punto. Adrián está ganando por 5 a 3, cuando de repente se interrumpe la partida. Si cada uno aportó 32 euros. ¿Cómo deberán repartirse, de manera más justa, las apuestas depositadas?

Problema 4

Se ha introducido este gran cubo formado por 1000 pequeños cubitos en un bote de pintura roja



.
¿Sabrías cuantos cubitos tienen sólo una cara pintada, y dos caras pintadas , y tres y cuatro,… y ninguna?

Problema 5

En una bolsa hay 3 sombreros negros y 2 blancos. Al tiempo que se les pide que cierren los ojos, se les coloca un sombrero en su cabeza del que desconocen su color. El resto de sombreros no utilizados se guardan y se retiran de la vista.

A continuación, empezando por el último de la fila, se les pregunta si pueden adivinar el color del sombrero que llevan puesto. La respuesta fue la siguiente:

– El tercero, y último, que ve a las dos personas que se encuentran delante, dijo: “No lo sé”
– El segundo, situado en el centro, y que solo ve al de delante, dijo también: “No lo sé”, y
– El 3º, en primera fila, y que no ve a ninguno de los otros dos, contestó: sí yo lo sé ¿cuál era su color?

Problema 6

Este número $N = 3^{123}.7^{2005}$ es muy grande.
¿Sabrías el dígito correspondiente a sus unidades?

Problema 7

Tenemos una bolsa con 50 canicas blancas y otra bolsa con 50 canicas rojas. Tomamos 10 canicas de la primera bolsa y las introducimos en la segunda bolsa. Posteriormente mezclamos bien las canicas en esta última bolsa y tomamos 10 canicas que las llevamos a la primera de las bolsas..
Si comparamos las canicas rojas que hay en la primer bolsa con las canicas blancas que hay en la segunda ¿cuál de las dos tiene más ?

Problema 8

Todas las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano entre sí. Una de ellas se dio cuenta que el número total de apretones de manos fueron 45 en total. ¿Cuántas personas acudieron a dicha reunión?

Problema 9

Al acabar un partido de fútbol su resultado es de 4-3 ¿cuál fue el resultado del descanso? ¿Cuántos caminos distintos hay para llegar a este resultado?

Problema 10

En una academia de idiomas hay matriculados 145 alumnos, de los cuales 78 estudian inglés y 45 francés. Mientras que 20 estudiantes están matriculados en ambos idiomas.¿Cuántos hay que no estudian ni francés ni inglés?

Problema 11

Dada la función $y = ax^2 + bx + c$
¿qué influencia tienen los parámetros a, b y c sobre la función?

Problema 12.

Un taxi se ve envuelto en accidente nocturno y se da a la fuga. En dicha ciudad el 15% taxis son azules y el 85 % taxis son verdes
Una testigo dice que el taxi es de color azul
Como es de noche y los clores azul y verde se pueden confundir fácilmente, la policía le hace una prueba de visión y en el 80% contesta bien ¿cuál es la probabilidad de que el taxi sea realmente azul?

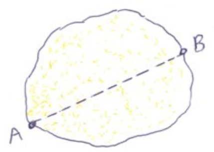
Investigación: El tunel eupaliano

Hacia el año 550 a C. Polycrates regidor de la ciudad de Samos (al sur de la península italiana), encargó al ingeniero Eupalinos la construcción de un túnel que atravesara el monte Kastro a cuyos pies se situaba la ciudad. El túnel conectaría un manantial de agua con la ciudad, asegurando así el suministro de agua. Como su construcción era muy urgente, Polycrates obligó a realizar la obra comenzando por las dos bocas simultáneamente, lo que claramente supuso un reto para Eupalinos. El túnel en cuestión tenía 1.036 metros de longitud, y es de señalar que las dos ramas que debían juntarse en el interior del monte se desviaron menos de 1%.

Dicho túnel, que aún se mantiene en pie, y su construcción es motivo de asombro entre los visitantes fue sin duda una gran obra de ingeniería.

“Desde un punto de vista esquemático: La montaña a excavar tenía dos entradas, que llamaremos A y B y el túnel debía construirse mediante un segmento que uniese los puntos A y B”

En la figura adjunta se representa la planta del monte y, en trazo discontinuo el túnel que se desea construir.



Nota: Es evidente que el problema clave es conocer la dirección de la recta que une los puntos A y B. ¿sabrías resolver tú este problema?

.

6.-Para finalizar

Como resumen de algunas ideas que hemos mostrado traslado algunas reflexiones:
Para abordar la resolución de un problema matemático se precisa por parte del resolutor o resolutora:

- Conocimientos matemáticos adecuados a los problemas propuestos.
- Conocer algunas estrategias heurísticas.
- Deseos de resolver el problema.
- Una actitud inicial sana, libre en lo posible de bloqueos y barreras previas...
- Una juiciosa evaluación de la situación del proceso a medida que se realiza, a fin de distribuir correctamente el esfuerzo que se debe emplear en las diferentes tareas de la resolución del problema
- Una perseverancia tenaz, la cual viene a ser el motor que pone en conseguir tensión todos los resortes disponibles de la mente

6.- Bibliografía

CALLEJO, Mª LUZ.(1990): *La resolución de problemas en un club matemático***.** Narcea. Madrid**.**
CALLEJO, Mª LUZ Y VILA, ANTONI (2004):*Matemáticas para aprender a pensar.*
el papel de las creencias en la resolución de problemas. Narcea. Madrid
GUZMÁN, M. DE (1986): *Aventuras matemáticas*. Labor. Barcelona.
GUZMÁN, M. DE (1991*):* *Para Pensar Mejor*. Labor. Barcelona.
KILPATRICK, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), Mathematical problem solving: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
LAKATOS, I. (1982*): Pruebas y Refutaciones*. Alianza. Madrid.
MASON, J., Y OTROS (1988): *Pensar matemáticamente*. MEC-Labor.
NEWELL, A. Y SIMON, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
POLYA, G. (1.965): *Cómo plantear y resolver un problema*. México. Trillas
SCHOENFELD, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, VA: Academic Press.