La resolución de problemas (RdP) como herramienta de utilidad para la modelización matemática (MM): estudio de casos de la vida real

Sixto Romero Sánchez
sixto@uhu.es; acaiberabida@gmail.com
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva

RESUMEN

Una comprensión teórica coherente del proceso de modelización matemática (MM) y del proceso de aprendizaje relacionado con él, así como el uso de la resolución de problemas (RdP) en matemáticas, ha sido desarrollada durante los últimos 25 años a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas. De hecho, ahora disponemos de una teoría, como un sistema de puntos de vista interconectados, que se usa para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza de la matemática, como así también para analizar y comprender mejor las dificultades de aprendizaje de los alumnos relativas a la modelización (Blum et al., 2003). Con este trabajo, pretendemos mostrar alguna reflexión teórica sobre lo relatado ut-supra mostrando algunos ejemplos sencillos, Situaciones Problemáticas Planteadas (SPM), sobre la matemática aplicada a la vida real.

Modelización Matemática, Desarrollo Curricular, Competencia, Resolución de Problemas

***matemática involucrada en ellas*. La modelización**

1. Breve introducción: la Modelización Matemática como una teoría

El desarrollo de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos es frecuentemente considerado relevante para los últimos años de la escuela secundaria o después de ella. *La creencia general entre los profesores es que las actividades de modelización presuponen una comprensión de la matemática involucrada en ellas*. La modelización matemática, sin embargo, puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al alumno a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos.
Antes de presentar diferentes ejemplos de estudios de casos de la vida real analicemos desde el punto de vista teórico el concepto de modelización matemática (MM) y su relación con la Resolución de Problemas (RdP).
La investigación en educación matemática ha sido, de algún modo, reticente en desarrollar sus propias teorías paradigmáticas. Con frecuencia, estas teorías son tomadas de ciencias de base y aplicadas al campo de la educación matemática (por ejemplo, teorías generales del aprendizaje son tomadas de la Pedagogía o de la Psicología). Por lo tanto, es relevante buscar áreas en la educación matemática donde las teorías puedan emerger del estudio de los procesos de Enseñanza/Aprendizaje (E/A) de las Matemáticas:

a) Una comprensión teórica coherente del proceso de modelización y del proceso de aprendizaje relacionado con él ha sido desarrollada durante los últimos 20 años. Esto ha sucedido a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas. De hecho, ahora disponemos de una teoría, tomada como un sistema de puntos de vista interconectados, que puede ser usada para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza general de la matemática, como así también para analizar, prever y comprender mejor las dificultades de aprendizaje de los alumnos relativas a la modelización (Blum et al., 2003): "*La absoluta comprensión de los conceptos "modelo matemático" y "modelización" es una parte importante de esta teoría y, antes de ilustrar la relevancia de la teoría para la enseñanza de la matemática, es necesaria cierta clarificación conceptual"*

b) Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Este aspecto fundamental del concepto de modelo desde ya tiene significativas implicaciones didácticas. En primer lugar, esto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados. En efecto, esto es el núcleo del problema, ya sea en relación al potencial que tiene el aprendizaje de la modelización matemática, como a las dificultades conectadas con este aprendizaje: a) ilustrar la naturaleza de un modelo matemático y algunas de sus implicaciones didácticas y aunque sea muy simple la aplicación de la matemática a una situación de la vida diaria; y b) hacer explícitas las relaciones dentro del modelo y discutir la validez de las posibles aplicaciones del mismo, obteniéndose algunas consideraciones sobre las relaciones entre los conceptos matemáticos y las representaciones, y su significado en el contexto. Con ello, se puede explicitar las relaciones dentro del modelo que permita una crítica del mismo y de su posible uso.

2. El proceso de modelización

En principio, existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático.

Esto significa que alguien de manera implícita o explícita ha recorrido un proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. En otras palabras, con el fin de crear y usar un modelo matemático es necesario, en principio, recorrer todo el camino de un proceso de modelización. Analíticamente es posible describir un proceso de modelización matemática consistente en los siguientes seis sub-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003) [1]:

(a) ***Formulación del problema:*** formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.
(b) ***Sistematización***: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. Del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.
(c) ***Traducción*** de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
(d) ***Uso de métodos matemáticos*** para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
(e) ***Interpretación de los resultados y conclusiones*** considerando el dominio de investigación inicial.
(f) ***Evaluación de la validez del modelo*** por comparación con datos observados y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

3. La modelización matemática como práctica de enseñanza

La modelización matemática es una tarea difícil. El docente tiene que colocar una situación donde los alumnos puedan trabajar con un fenómeno o situación de la vida diaria que les sean familiares y que les permita poner en juego su conocimiento matemático en un proceso de modelización. Colocar el escenario para actividades de modelización es un elemento crucial en la enseñanza de la modelización matemática. La descripción general del proceso de modelización y las sub-competencias de modelización, tanto como los elementos de justificación pueden ser usados como herramientas para la planificación de actividades de enseñanza. A continuación, presentaremos un modo de plantear el escenario para actividades de modelización en los niveles iniciales de la escuela secundaria [5].
3.1. Una teoría sobre modelización matemática se funda en las definiciones de modelo matemático, modelización, y competencia en modelización. Pero la teoría, la cual aún está en desarrollo, es más que sólo estas definiciones. La teoría también incluye una justificación de la modelización matemática como elemento esencial de la enseñanza de la matemática en los distintos niveles del sistema educativo, como así también, sugerencias y reflexiones sobre cómo implementar la modelización en diferentes contextos educativos (Niss, 1989) [4].
3.2. La justificación de la modelización como un elemento de la enseñanza de la matemática en la educación general ha sido tema de investigación en educación matemática durante años. Podemos establecer (según Morten Blomhøj) los tres argumentos más importantes a favor de la modelización matemática, como elemento central en la enseñanza general de la matemática aún desde edades tempranas:
(a) **La modelización matemática tiende puentes** entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria [7].

(b) **En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas**, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia.
Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada.

(c) **Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes** en el funcionamiento y formateado de sociedades basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas y seculares en criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático.

(d) **Los ejemplos que se presentan pueden ilustrar** en realidad **la posibilidad de enfocar en uno de estos tres argumentos** de justificación al, deliberadamente, hacer la puesta en escena para el trabajo de modelización de los alumnos [6]. En este contexto, la teoría de modelización matemática es útil para la planificación educativa y práctica de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles.

(e) **La experiencia en diferentes niveles de enseñanza** ((Blomhøj,1993; Blomhøj y Skånstrøm, 2002; Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003), **muestra que la teoría puede ser una herramienta para la práctica de la enseñanza de la modelización matemática** al permitir:

* Analizar procesos auténticos de modelización retrospectivamente y adaptar estos para la enseñanza;
* Analizar actividades de modelización de los alumnos;
* Identificar los diferentes sub-procesos involucrados en un particular proceso de modelización.
*Diseñar episodios de enseñanza y preparar el diálogo que desafíen las subcompetencias;
*Comunicar y discutir las metas de un curso de modelización con alumnos y profesores;
*Enseñar modelización matemática basada en la experiencia de los alumnos.

4. Estudio de casos: diferentes tipos de modelos

A lo largo de la Historia, las Matemáticas han ocupado un lugar predominante en los currículos escolares [4]. Han alcanzado este protagonismo no tanto por la importancia que tienen en si mismas como por razones de tipo cultural y social. Es tal la importancia lograda que prácticamente se enseña en todas las escuelas del mundo. Tradicionalmente han existido dos razones básicas para ponderar las Matemáticas:

a) ***Su facultad*** *para desarrollar la capacidad de pensamiento.* Juan Luis Vives (1492-1540). ya señaló que "…*son una asignatura para manifestar la agudeza de la mente*…"
b) ***Su utilidad****,* tanto *para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas* necesarias para el desarrollo personal y profesional. Los casos que presentamos pretende utilizar la Resolución de Problemas (RdP´s) como un instrumento útil y necesario para llegar al concepto de Modelización Matemática.

De los problemas que existen a nivel mundial, sobre todo en el nivel de secundaria, en el área de conocimiento de Matemáticas, el que actualmente está llamando la atención de los profesionales de Educación Matemática tiene relación con la forma de ligar y estructurar los planes de estudios en su relación con otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática: ***la mayoría de los temas están desconectados del mundo real*** y, por qué no decirlo, de las ciencias, lo que tiene como handicap que ***los estudiantes no conciben verdadera utilidad de las matemáticas necesarias para su formación*. Evidentemente no es adecuado para la formación de nuestros estudiantes en un mundo cada vez más matematizado. En muchos países, y en España también, teniendo en cuenta las excepciones en algunas comunidades autónomas, **"…***se ha generado una tradición en la forma de organizar los curricula en matemáticas, reduciéndose la enseñanza a un trabajo basado en algoritmos que no permite a los estudiantes comprender el rol de la matemática en la sociedad…***"** (Aravena 2001) [10]. Esta forma de enseñanza arraigada en los sistemas educativos ha sido perjudicial para obtener mayores logros en los aprendizajes de nuestros estudiantes, donde se acrecienta aún más la diversidad.

Desde no hace muchos años, los investigadores en Educación Matemática han centrado su atención en el diseño de actividades basado en la modelización matemática de situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía en la ganancia, por parte de nuestros alumnos, del aprendizaje matemático, y por ende en la enseñanza por parte de los enseñantes. Para llegar a modelar matemáticamente, desde el punto de vista de las actitudes y concepciones, el papel de la RdP´s [4] debe ser, a nuestro juicio, el vehículo del aprendizaje matemático a través:

* Del desarrollo de una actitud abierta.
* De ejemplos que nos conducen a una concepción dinámica de la evolución del conocimiento.
* De una visión integrada de la Matemática.
* De la facilidad en la introducción significativa de un nuevo concepto.
* De la puesta en relieve de los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa.
* De la muestra de la utilidad de la Matemática en la vida.
* Del desarrollo de estrategias para cualquier ciudadano.

4.1. Primera reflexión sobre la resolución de problemas como vía hacia la modelización matemática

Recogemos la idea de Jean Pierre Kahane, [matemático francés y profesor Emérito de la Universidad Paris Sud Orsay, antiguo alumno de l'École Normale Supérieure, y miembro de l'Académie des Sciences (sección matemáticas) desde 1998, cuando afirma: " …*la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas se realiza desde todos los ángulos, desde todos los estatus*: *puede ser a partir de la tarea diaria en el aula, de las dificultades de los profesores y de los alumnos de todos los niveles educativos. Puede realizarse a través de un estudio detallado de los exámenes, de las pruebas; o de las actividades extraescolares, de las gymkanas, rallyes, competiciones, olimpiadas, en definitiva de todas las manifestaciones de animación y difusión de las matemáticas; o del rol y de la evolución de las ciencias matemáticas en el conjunto de las ciencias y de la sociedad*…".[2].

Igual que en Francia, en nuestro país, los enseñantes agrupados, o no, en Sociedades de Profesores, Editores de Revista de Educación Matemática,… (por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática, FESPM[1], la revista MSEL[2], Modellig in Science Education and Learning, entre otras) han tomado iniciativas con el objeto de hacer propuestas e iniciativas en el campo de la Modelización Matemática y que conduzcan a una mejora del binomio Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas:

"…Desde no hace muchos años, los investigadores en Educación Matemática han centrado su atención en el diseño de actividades basado en la modelización matemática de situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía en la ganancia, por parte de nuestros alumnos, del aprendizaje matemático, y por ende en la enseñanza por parte de los enseñantes…" (Romero, et al. 2014).

Los problemas tienen una larga tradición en matemáticas. George Polya[3] consideraba los Elementos de Euclides como una colección de problemas (una sucesión de enunciados y soluciones). Junto a Gabor Szegö[3] produjo bajo el título de *Ejercicio de Análisis*, una colección graduada de problemas que eran, sin duda, en su época, la mejor introducción al análisis matemático, y que ha quedado como una joya de gran interés que merece ser estudiada:

"…*Esto demuestra, la inutilidad de seguir insistiendo sobre el papel de los problemas en la investigación matemática…"* (Kahane, J:P. 2002).

4.2. Segunda reflexión sobre una enseñanza problematizada y modelizada de las matemáticas

Con la presentación ulterior de varios ejemplos sobre modelización, para diferentes niveles de enseñanza, cada uno de ellos ilustrativo de los diferentes niveles de complejidad que pueden aparecer en el proceso de matematización, se va haciendo explícito el marco teórico que fundamenta globalmente cada uno de los pasos dados, los enfoques adoptados o los resultados obtenidos. Se trata de problemas con interés y estimulación para el alumnado y el profesor. Naturalmente, por razones obvias de espacios, presentaremos algunos casos que abarcan alguna rama de la matemática, con las que, a forteriori, podrá el lector encontrar el deseo de nuevas soluciones distintas a las propuestas presentadas. Con ello, apostamos por una cultura matemática que pretende coordinar tres componentes indisociables:

a) ***Situaciones dónde la actividad del alumno encuentra su sitio***, situaciones suficientemente significativas para que el alumno se "apropie" del problema planteado, y que consecuentemente tenga un coste cognitivo ni demasiado elevado ni irrisorio.
b) ***Los enfoques y actitudes científicas que se esperan***, satisfacen los objetivos generales y específicos de la enseñanza de las matemáticas.
c) ***Los conocimientos "a priori" "conocidos", para su organización, deben estar de acuerdo con la profundidad definida por el nivel de clase***, por el ritmo adoptado por algunos estudiantes, ….etc.
d) *Y c*omo resultado, el mismo contenido puede ser enseñado o "repetido" varias veces, pero a niveles diferentes con sus correspondientes ajustes.

4.3. Situaciones Problemáticas Planteadas (SPM).

En cada uno de los casos que presentamos a continuación indicaremos, a priori, el nivel donde ciertos ejercicios propuestos nos parecen que pueden ser abordados. Sin embargo, en aras de la libertad de cátedra, esta indicación no está dada más que a título orientativo ya que depende, como no puede ser de otra manera, de los contenidos de los programas, del nivel de la clase y de las elecciones juzgadas como oportunas por el enseñante para conseguir sus objetivos. De esta manera aconsejamos que para otros ejercicios parecidos no se les indique el nivel de presentación, debido a su mayor dificultad para el alumnado. Naturalmente, al considerar que estando, por ejemplo, en un nivel de enseñanza secundaria, deberá ser el profesor el que considere oportuno si va a enseñar a alumnos que han elegido la opción tradicionalmente denominado ***"opción de sociales"*** frente a la ***"opción de ciencias".*** En definitiva presentaremos varios estudios de casos:

a) En referencia privilegiada a **objetivos metodológicos (OM)**
b) En referencia privilegiada a **contenidos(C)**

---

[1] htpp://www.fespm.es; [2] http://ojs.upv.es/index.php/MSEL
[3]Polya, G, Szegö, G. (1972)[1925]. Problems and theorems in analysis, 2, Vols.Springer-Verla

SPM-1. (OM): TÉCNICAS ALGORÍTMICAS

Si existe una problemática que no conviene abordar en términos de contenidos, esta es la técnica algorítmica. Sabemos que *ALGORITMO es un conjunto de reglas operatorias que nos permite resolver un problema en un número finito de operaciones.* La característica de un algoritmo es transformar grandes cantidades de datos de entrada, en otras grandes cantidades de salir, a partir de un conjunto bien definido de instrucciones de transformación:

¿Cuál es el problema que se le plantea al alumno de un determinado nivel de enseñanza?

Estamos ante un gran desafío: asegurar que, ante un problema a resolver, el alumno debe buscar primero el sentido de las cuestiones planteadas, a continuación asegurarse una "buena utilización", ver la elaboración, de un algoritmo, y no a la inversa, que es lo tradicional y normalmente tiende a hacer, alentados la mayor parte del tiempo por la misma forma de situaciones propuestas y por la investigación inmediata de la solución y su evaluación. La principal dificultad didáctica reside entonces en la investigación de un compromiso entre el aprendizaje, la maestría y el control de las técnicas [3].

Situaciones o Circunstancias y enfoques (SOE)

En general, cualquier situación que pueda ser problematizada o modelizada matemáticamente lleva asociada actividades susceptibles de descomponerse en términos de algoritmos. Concretamente, en este apartado propondremos situaciones dónde *la puesta en evidencia, la explicitación, el desarrollo de un algoritmo o simplemente el reconocimiento de su adecuación y el recurso le representan al alumno el objetivo más importante de la actividad que se le plantea.* Vamos a presentar dos columnas donde la ausencia de la columna correspondiente a "contenidos" se justifica por el hecho de que éstos no son introducidos ni institucionalizados por este problemática, aparecen o se implican como consecuencia del desarrollo del algoritmo, de su análisis e incluso de su concepción.

SITUACIONES	**ENFOQUES**
Revisión de algunos algoritmos de cálculo y de diseño utilizados en el aula	Tomar conciencia del aspecto algorítmico de ciertas actividades dónde el control no pasa por el significado, si no por la corrección de su desarrollo
Distinción de etapas a la hora de implementar un algoritmo	Descomponer conscientemente un algoritmo en sus pasos sucesivos. Escribir el programa, si ha lugar, en un lenguaje informático conocido u otro lenguaje simbólico que pueda ser utilizado por los alumnos
Situaciones específicas en diferentes niveles. Operaciones con números, representación gráfica de funciones, correspondencia entre funciones integrables, construcción de algoritmos para extraer la raíz n-ésima de un número	Vuelta atrás a los conocimientos ya usados y aplicarlos a los ejercicios planteados en los diferentes niveles. Por ejemplo, dar valores que permitan aproximar una raíz cuadrada, cúbica o n-ésima.
Utilización de un algoritmo con iteración: $a_n=f(n)$, o un algoritmo recursivo: $a_{n+1}=f(a_n,a_{n-1})$	Distinguir entre los conceptos de iteración y recursividad y escribir un organigrama completo

CASO 1. POBLACIÓN DE "N" INDIVIDUOS

Supongamos una población P con "n" individuos. Se desea enumerar los pares {M,N} de partes de P estrictamente incluidos uno en el otro, tal que M esté incluido en N, es decir, $M \subset N$. a) Se procederá, como aplicación de lo citado ut-supra, explicitando un algoritmo de constitución de tales pares para cualquier población. b) ¿Cuántos podemos constituir en una población de 20 individuos?

Indicación: Se trata de una tarea que intenta *"movilizar" directamente a los alumnos, en este caso de bachillerato, para atacar el problema con, "saber-como" afrontarlo en materia de combinatoria.* Esta situación tiene algunas posibilidades de movilizarlos por su abertura y su aspecto curioso. *¿Podemos decir que es un ejemplo que se resuelve con una "pequeña o gran matematización"?* Lo esencial es manipular correctamente los conceptos de combinatoria estableciendo el criterio de uso del número combinatorio.

α) Se trata de encontrar todos los pares de partes {M,N} de P tales que M esté estrictamente incluida en N.

- Si N=P, para constituir las partes M, es suficiente eliminar del conjunto de todas las partes de P la parte N=P. Se tiene por tanto 2^n-1 pares {M,N}.
- Si N no incluye más que "n-1" individuos, para constituir los pares {M,N}, es suficiente elegir "n-1" individuos entre los "n", después de formar M como parte estrictamente incluida en este conjunto de n-1" elementos. Se tendrá entonces 2^{n-1} partes M y $\binom{n}{n-1}(2^{n-1}-1)$ pares {M,N}
- Si el cardinal de N es igual a n-k, card(N)=n-k, el número de partes M que se pueden formar es 2^{n-k}-1, y el número de pares es $\binom{n}{n-k}(2^{n-k}-1)$
- Finalmente, el número de tales pares es:

$$\binom{n}{n}2^n+\binom{n}{n-1}2^{n-1}+\binom{n}{n-2}2^{n-2}+\ldots\ldots+\binom{n}{1}2^1+\binom{n}{0}2^0-\left(\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{1}+1\right)=(2+1)^n-2^n=\mathbf{3^n-2^n}$$

β) Si n= 20, el número de pares {M,N} es 3.485.735.825.

CASO 2. HOTEL EN LA MECA

Actualmente se construye el hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita, el cual será el más grande del mundo y requerirá de un inversión de 3.6 mil millones, el cual se prevé será inaugurado para el año 2017. El gran podio de 45 pisos de altura y 10,000 habitaciones, estilo fortaleza, será coronado por 12 torres de 10 pisos. También contará con 70 restaurantes, cuatro helipuertos, una estación de autobuses, patios de comida, un centro comercial y un centro de convenciones y estacionamientos.

Fig.1. Hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita
http://centrourbano.com/construiran-hotel-con-10000-habitaciones/

Las habitaciones se enumeran en forma de caracol 1,2,3,4, 5,6, 7,…….,10000. A partir del algoritmo anexo construido en forma caracol infinito se trata de:
a) Encontrar la fórmula recurrente que permita conocer todos los números de las habitaciones situadas sobre la diagonal dónde figuran los números escritos en negro sobre fondo rojo.
b) ¿Son todos primos todos los números los que aparecen en la diagonal?

21-22-23-24-25-26
20-07-08-09-10-27
…. 19-06-**01**-02-11-28
39-18-**05**-04-03-12-29
38-**17**-16-15-14-13-30
37-36-35-34-33-32-31

Indicación: El objetivo es conseguir llegar a conseguir un algoritmo de construcción con una fórmula recurrente que sea decisiva para obtener los números de la diagonal señalada en rojo. La segunda cuestión debería incitar a los alumnos a conseguir la construcción en caracol al menos sobre una vuelta, lo que le permitirá constatar que no se obtiene un número primo (65) lo que le puede llevar a aceptar retoques para tratar de llevar a cabo una invariante de construcción [3], invariante que se someterá a una demostración por recurrencia (¡esto se puede hacer a nivel de cursos finales de primaria y primeros cursos de secundaria!)
Se podrá, por ejemplo, notar:

- En la vuelta 0: el número es 1
- En la vuelta 1: el número es $5=4+1=2^2+1$ según el esquema

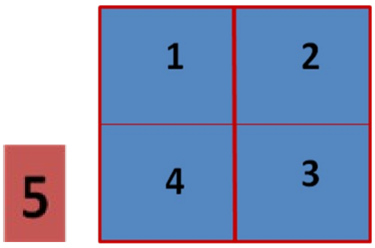


Fig.2. Vuelta 1

- En la vuelta 2. El número es $17=16+1=4^2+1$

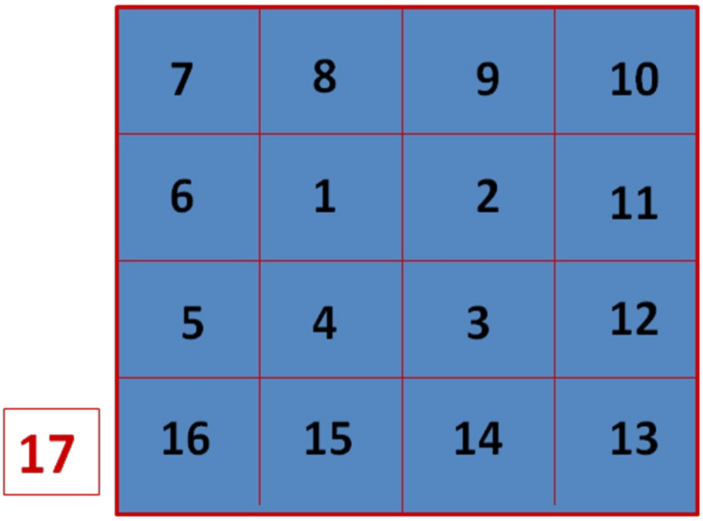


Fig.3. Vuelta 2

- En la vuelta 3. El número es $37=36+1=6^2+1$
- En la vuelta 4. El número es $65=64+1=8^2+1$, qué se puede verificar!

¿Se podrá afirmar que en la vuelta **“n”, el número buscado será $(2n)^2+1$** según el esquema siguiente?:

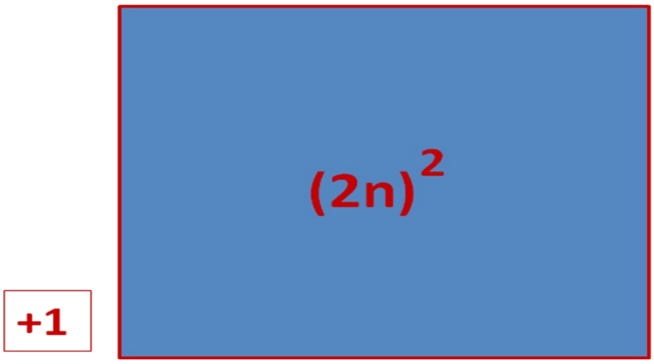


Fig.4. Vuelta “n”

Supongamos que esta afirmación sea verdadera para el rango de “n”, entonces el número buscado para el rango “n+1” es. **$(2n)^2+ 4(2n+1)+1$** según la figura adjunta:

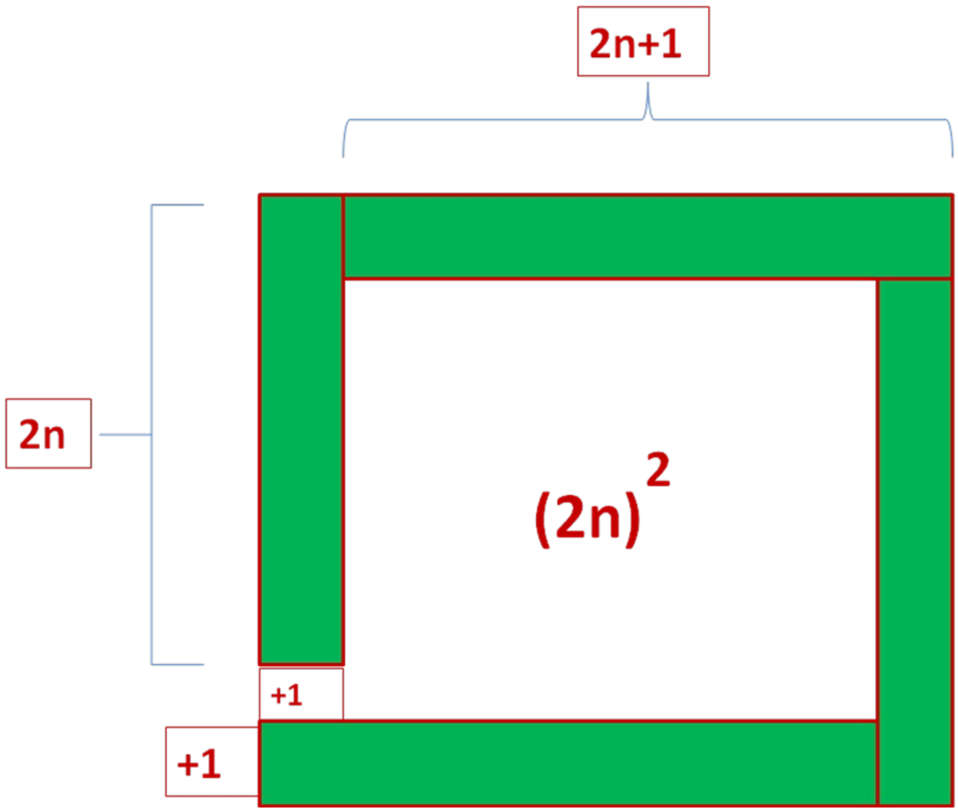


Fig.5. Vuelta “n+1”

El número buscado que corresponde al rango”n+1” se puede escribir más simplemente **$4(n+1)^2+1$ ó $[2(n+1)^2+1$**), y por lo tanto la afirmación es entonces validada.
¡Si el financiamiento de la construcción del Hotel corre a cargo del Ministerio de Economía de Arabia Saudita, habrá que aconsejarle que este modelo de enumeración de las habitaciones podría entretener a los clientes, según la ordenación en caracol. Pienso que este ejercicio es muy motivador para los alumnos, fundamentalmente de secundaria!

SPM-2. (OM): CONJETURAS, PRUEBAS Y REFUTACIONES

Por conjetura se entiende el juicio que se forma (moral, ético o matemático) de las cosas o sucesos por indicios y observaciones. En matemáticas, *el concepto de conjetura se refiere a una afirmación o hipótesis que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada.* Una vez se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales [3].
Tal vez contrariamente a la definición que se ha dado de conjetura ut-supra, en matemáticas distinguimos entre prueba y demostración: la demostración matemática es una prueba particular, respetando las reglas y una retórica codificadas y comúnmente aceptada, si bien existen diferentes formas de pruebas: la prueba física o la “exposición” dónde es suficiente poner en evidencia un hecho o un ejemplo.
¿Qué sucede en este tipo de problemática y de nuevo nos preguntamos de qué manera el alumno la abordará en su nivel de formación como discente?

Situaciones o Circunstancias y enfoques (SOE)

Las actividades relacionadas con este tema, pueden llevar a la reflexión personal del estudiante, a la duda, a hacer suposiciones, convencerse de la verdad de los enunciados expuestos o de las propiedades que se puedan deducir, si se trabaja de manera colectiva. Este trabajo en común, debe ayudar a la búsqueda de soluciones, pero también tienen un aspecto social donde existe: *la necesidad de convencer si la decisión que se tome es verdadera o falsa, la necesidad de comunicar de manera objetiva, así como tener en cuenta la subjetividad de un líder, a modo de portavoz que comunique los intercambios durante el proceso de resolución del problema.*

SITUACIONES	ENFOQUES
Construcción de poliedros regulares convexos	A tientas, cortar, juntar, conjeturar. Validar o

(sólidos de Platón)	refutar con diferentes argumentos
Regiones que encierran figuras geométricas planas por una elección recurrente de ciertos puntos	Conjeturar recurrencias, refutar después de otras, demostrar y verificar
Análisis del discurso matemático a través de una demostración clásica.	Descomponer un texto matemático en enunciados elementales, explicitar los conectores empleados y su función
Puesta en evidencia de las modalidades fundamentales del razonamiento matemático por una práctica del “modus ponens”, de la contraposición, del razonamiento al absurdo….	Distinguir los roles respectivos del ejemplo y del contra-ejemplo.

CASO 3. CASO CURIOSO CON RAICES CUADRADAS DE NÚMEROS GRANDES

Se tiene que:

- $\sqrt{1x15+1} = 4$
- $\sqrt{11x105+1} = 34$
- $\sqrt{111x1005+1} = 334$
- $\sqrt{1111x10005+1} = 3.334$

¿Cuál será el valor de $\sqrt{11111x100005+1}$?

¿Qué tipo de conjeturas pueden ser emitidas? ¿Se pueden probar? Calcular, entonces: $\sqrt{1111111111x10000000005+1} = ?$

Nota e indicación: Este ejercicio está diseñado para recordar el significado de un número escrito en sistema decimal. Su forma debe conservar la curiosidad del alumno de forma que encaje con mayor facilidad en la prueba de la particularidad de los números dados. Para ello, varias secuencias de números serán consideradas y una de las claves para pasar de la definición a la comprensión del término de rango n de estas sucesiones a su expresión en función de “n” .

- La sucesión M de números enteros escribiendo únicamente con “1”

  M_1=1; M_2=11; M_3=111,……M_n=1111 …11, dónde $M_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$

- La sucesión L de números enteros tal que:

  L_1=15; L_2=105; L_3=1005,……L_n=1000000……005, dónde $L_n = 10^n + 5$

- La sucesión P de números enteros tal que para $\forall n \in N^*$

  $P_n = M_n.L_n + 1 = \dfrac{10^n - 1}{9}(10^n + 5) + 1 = \dfrac{10^{2n} + 4.10^n + 4}{9} = (\dfrac{10^n + 2}{3})^2$

De dónde, $\forall n \in N^* : \sqrt{M_n.L_n + 1} = \dfrac{10^n + 2}{3}$

Conclusión: Queda por asegurar que se obtiene un entero. En efecto:

$$\frac{10^n + 2}{3} = \frac{10^n + 3 - 1}{3} = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = 3.M_n + 1$$

- Con todo ello se puede conjeturar que:

  $\sqrt{1111111111x10000000005+1} = 3.333.333.334$

CASO 4. ESCALERAS DE FIBONACCI

Como se sabe esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en la cría de conejos, configuraciones biológicas, como por ejemplo en *las ramas de los árboles, en disposición de las hojas de un tallo, las inflorescencias del brécol romanescu, en la flora de la alcachofa*,…

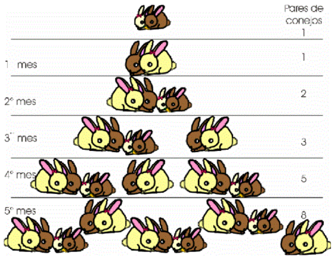


Fig. 6. Ejemplo 1 de la Sucesión de Fibonacci

Fig. 7. Ejemplo 2 de la Sucesión de Fibonacci

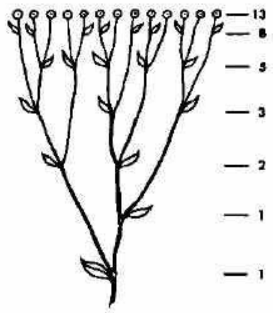


Fig.8. Ejemplo 3 de la Sucesión de Fibonacci

Tal vez sea una deformación profesional pero los matemáticos "olemos" a número cuándo éste aparece: *observamos continuamente propiedades del número en las matrículas de los coches, contamos las personas en las paradas de autobuses, intentamos estimar cuántas personas participan en una manifestación, o cuántos espectadores asisten a una obra de teatro, cine o campo de fútbol…Pero lo que es seguro que alguna vez hemos contado las diferentes formas de subir una escalera*. Con este caso, damos respuesta a la siguiente cuestión: ***¿De cuántas maneras diferentes podemos subir una escalera de 1,2,3,4, 5, de 10, de 20, de 30, de 40, de 50 escalones?***

UNA ESCALERA DE 1 Escalón: 1 sola manera

Fig. 9. Escalera de 1 escalón

UNA ESCALERA DE 2 Escalones: 2 maneras

- Directamente 2 escalones
- Uno en uno

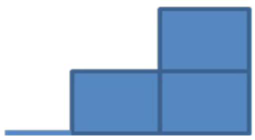


Fig. 10. Escalera de 2 escalones

UNA ESCALERA DE 3 Escalones: 3 maneras

- De uno en uno
- 2 escalones y después uno
- Un escalón y después 2

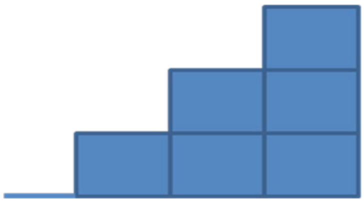


Fig. 11. Escalera de 3 escalones

UNA ESCALERA DE 4 Escalones: 5 maneras

- De uno en uno
- De dos en dos
- Uno, uno y dos
- Dos, uno y uno
- Uno, dos y uno

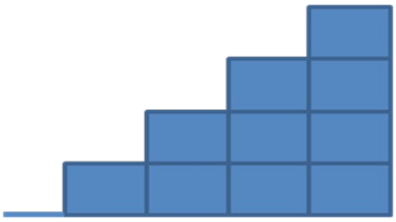


Fig. 12. Escalera de 4 escalones

UNA ESCALERA DE 5 Escalones: 8 maneras

- Decidimos subir el primer escalón, y ya sabemos que hay 5 maneras de subir 4 escalones.
- Decidimos subir dos escalones, y sabemos que para subir los tres restantes hay 3 maneras de subir.
- Por lo tanto, en total serán: 5+3=8 maneras

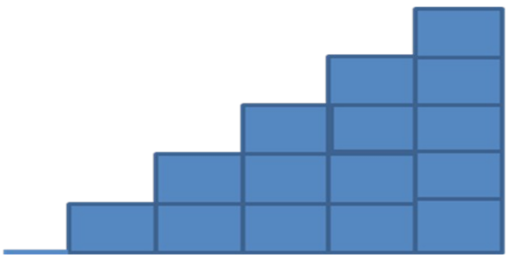


Fig. 13. Escalera de 5 escalones

Conclusión:

- Para una escalera de 6 Escalones serán: 8+5=13

Para una de 7 Escalones serán: 13+8=21.

De esta manera se consigue la siguiente tabla:

Escalones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……
Formas	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	……

Se obtiene así la denominada Sucesión de Fibonacci:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,….dónde el **término general para una escalera de n-peldaños** las diferentes formas de subir viene expresado en forma recurrente:

$$F_{n+1}= F_n+F_{n-1}$$

De la sucesión:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,…. obtenemos esta otra:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\dots\dots\ \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033$$

Nota e Indicación. En esta problemática, a partir de una situación real que podemos encuadrarla en la geometría de la escalera llegamos al número de oro definido por la relación de los datos obtenidos de la sucesión de Fibonacci. La situación descrita, se presenta como determinante en la solución investigada.

Problematizar la situación que tenemos que desarrollar consiste:

De una parte, ponderar la necesidad y el interés de trabajar con algoritmos de cálculos recurrentes.
Y de otra parte, comparar modos de cálculo sabiendo que es necesario conocer los "n-1" valores que preceden al valor Fn para calcularlo o simplemente, el valor de "n" para llegar a conseguir Fn con la ayuda de una fórmula explícita.
El número y/o la complejidad de las operaciones serán los criterios que aporten los alumnos a favor del descubrimiento y del cambio de estrategia en beneficio de uno de los dos métodos según las circunstancias. En definitiva la tarea consiste:

1º. ¿Cómo prolongar esta sucesión? Partir de un primer término F_0. Encontrar inductivamente el algoritmo que permite pasar, de la sucesión conocida del término F_n al F_{n+1}.
2º. Poder calcular, por ejemplo cualquier valor, F_{12}
3º. Definir la relación algebraica general que relaciona un cierto término con sus predecesores
4º. ¿Es posible obtener directamente el valor de F_n, sin necesidad de conocer los valores precedentes? Se induce de esta manera a que el alumno intente buscar la solución o soluciones de la ecuación recurrente: $F_{n+1}= F_n+F_{n-1}$ de la forma λ^{n}.
5º. Escribir la solución general de la ecuación en recurrencia como combinación lineal de estas soluciones.
6º. Determinar los coeficientes de tal manera que la solución verifique los valores de la solución de Fibonacci.
7. Calcular F_{12} con la ayuda de la fórmula encontrada, sin necesidad de utilizar la calculadora.
8º. Comparar los dos valores obtenidos.
9º. Considerando la sucesión de razones: $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, hallar el límite de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ cuando "n" tiende a infinito.

En este sentido por un lado, el alumno puede pensar que existen ciertas dificultades para determinar un elemento cualquiera de la sucesión, para valores elevados de la misma, por ejemplo ***F_{10000}***, y por otro, si se sustituyes λ^n en la ecuación de recurrencia, se obtiene $\lambda^2=\lambda+1$, $\lambda^2-\lambda-1=0$ cuyas dos soluciones son $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, dando lugar a la solución general de la forma $F_n=C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. La identificación de esta fórmula con los valores dados de ***F_0*** y de ***F_1*** nos da como $C_1=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ y como $C_2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

El cálculo a mano de ***F_{12}***, si no necesita el conocimiento de valores anteriores, impone, por el contrario, el cálculo de coeficientes binomiales den el desarrollo de la expresión de exponente **"n".** Es evidente que un cálculo con la ayuda de de un programa de cálculo formal (ya sea con la ayuda del ordenador o de la calculadora), es accesible sin el empleo de una recurrencia.
Es importante que los alumnos tomen conciencia de estas diferencias sobre el tema de la algoritmia empleada.

También, la determinación del límite del cociente $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ impone que cada uno de los dos términos sea expresado bajo la forma explícita. Una tarea técnica, fácilmente ejecutable cpor los alumnos con la ayuda de algoritmos de desarrollo de expresiones algebraicas, muestra que el límite investigado es el número de oro, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1.61803398874989…

PROPUESTA DE TAREA

Para afianzar conceptos, y motivar a a los alumnos, antes de comenzar la demostración, podría ser interesante proponerles un pequeño trabajo consistente en.

a) De una parte calcular por recurrencia un cierto número de términos de la sucesión de Fibonacci, por ejemplo los setenta y cinco primeros términos….
b) Por otro lado calcular el valor de la expresión
$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para n=0 hasta n=75, por ejemplo. Ello debería conducir a la conjetura deseada y motivar a los alumnos en su demostración.

El enfoque dado está dirigido, naturalmente para alumnos de secundaria y bachillerato. Otro enfoque interesante para un nivel superior es tratar la sucesión de Fibonacci como una ecuación en diferencias, y transformar la ecuación de recurrencia ***$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$*** con ***F_0*** =1 y ***F_1***=1 en forma matricial $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}$. Calcular el término general consistirá en calcular la potencia n-ésima de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A^n=P^{-1}DP$ a través de la diagonalización por semejanza. La matriz ***P*** es la matriz cuyas columnas son los autovectores correspondientes a los autovalores de la matriz ***A***, que se puede comprobar fácilmente que son $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, y la matriz ***D*** es la matriz diagonal $D=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$

¡Se pone de manifiesto que con un ejemplo de la vida real, como es poner nuestra atención en las diferentes maneras de subir una escalera llegamos a uno de las más sorprendentes e interesantes relaciones que se pueden obtener a partir de los términos de la sucesión de Fibonacci! Se anima a los alumnos a investigar en.

- Su tratamiento geométrico
- Ver relaciones entre números consecutivos, sus cuadrados y productos
- Tratar de buscar la relación entre los números primos de la sucesión y sus subíndices
- Ver otras relaciones de potencias mayor de dos,
- ……!

5. Modelización en dominios dominios poco explorados

Hay muchos dominios matemáticos, en cuanto a RdP se refiere, casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal: teoría de grafos y Optimización, teoría del caos, topología, tratamiento de la Información, teoría de códigos y criptografía , modelos matématicos fractales, ……

SPM-3. (OM): CAMBIOS DE CUADROS Y DE REGISTROS
La RdP necesita frecuentemente uno o varios cambios de cuadros. Por esto entendemos no solamente un dominio de matemáticas y los conceptos que le son asociados, sino igualmente las relaciones entre estos objetos así como las formulaciones correspondientes: vocabulario y sintaxis específica de este dominio. Es así, por ejemplo, que la resolución de un mismo ejercicio puede hacer intervenir estrategias distintas en diferentes cuadros que pueden ser entendidos desde el punto de vista objetivo, evidenciando su necesidad, o impuesto por el enunciado, o subjetivo porque los conocimientos del alumno les permite asegurarse que son más familiares y/o más fácilmente explotables [8]. Este segundo aspecto presenta una ventaja desde el punto de vista didáctico. Los conocimientos referidos por el enseñante van a hacer progresar los conocimientos del alumno en uno a más cuadros que les son más cercanos.

Situaciones o Circunstancias y enfoques (SOE)

SITUACIONES	ENFOQUES
Lectura crítica de un texto matemático enunciado de un problema, extracto de un manual, texto histórico,….) seguido de una discusión	Extraer la información pertinente con un principio de argumentación.
Resolución matemática de un problema enunciado en lenguaje natural (“Word Problem”)	Pasar al registro simbólico en el proceso de modelización.
Resolución de un problema gracias a uno o varios cambios de cuadros y/o registros (pilotados por el enseñante o imaginados por el alumno)	Cambiar de cuadro o de registro, con el fin de facilitar la resolución del problema, y retornar de nuevo al cuadro y al registro.

En este apartado presentamos varios casos.

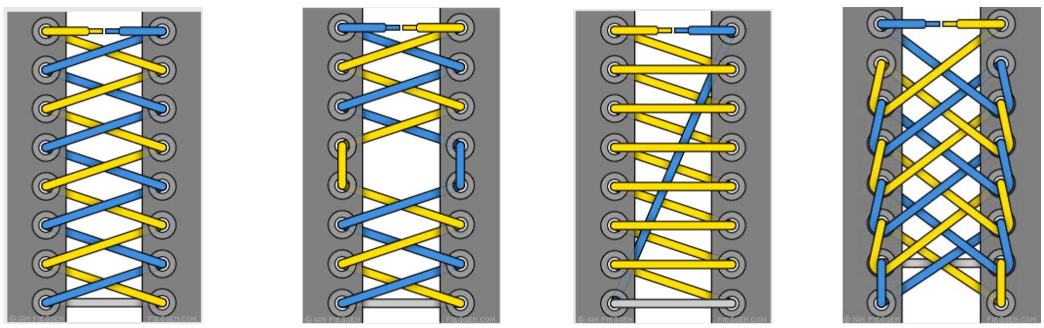
CASO 5. MATEMÁTICAS Y CORDONES

Al igual que la física o la química, lo cierto es que las matemáticas están por todas partes en nuestra vida diaria y hay muchas formas de perderles el miedo. **¡Podemos empezar por atarnos los cordones de las zapatillas!**

Fig. 14. Tres tipos de cordones
http://www.fieggen.com/

¡No es una broma!, hay muchas matemáticas tras el sistema más universal de sujeción para los zapatos. Al fin y al cabo, se trata de pasar un cordón por una serie de agujeros en distintas combinaciones. ¿Cuántas hay? ¿Y cómo se calculan? ¿No es esto Matemáticas? En un zapato normal con seis pares de ojales hay casi dos billones de formas distintas de hacer pasar un cordón a través de todos los ojale*s.* Claro que en la práctica, a la hora de atarse unas zapatillas, no todas esas combinaciones son prácticas ni cómodas.

Algunos casos de encordonados:



Cordón en Cruz *Cordón Hueco* *Cordón Tienda* *Cordón Tipo Araña*

Fig. 15. Cuatro maneras de atar cordones

http://www.fieggen.com/shoelace/index.htm

Dos cuestiones podemos plantearnos:

a) Bajo la óptica del comprador, la estética antepone cualquier actitud mostrando diferentes estilos.

b) Bajo la óptica del fabricante, sería más pertinente que tipo de encordonado requiere los cordones más cortos, y por consiguiente más barato.

¿Qué pauta de encordonado, entre todas las figuras presentadas ut-supra, requiere los cordones más cortos?

1. Idealizar o Modelizar el problema

Vamos a centrarnos en la longitud del cordón hasta los dos ojetes de la parte superior. La cantidad de cordón extra se necesita básicamente para hacer el nudo eficaz, y dado que es la misma para todos los métodos de encordonados, podemos ignorarla.

Partiendo de un enfoque a lo bruto, la longitud del cordón puede calcularse en términos de los tres parámetros del problema:

*El número “n” de pares de ojetes
*La distancia “d” entre ojetes sucesivos
*El espacio “r” entre los ojetes izquierdo y derecho correspondientes

Fijémonos en dos casos de los citados. Con la ayuda del Teorema de Pitágoras (¿qué habría pensado de esta aplicación particular?) tenemos que la longitud del cordón:

1. Para el Cordón en Cruz

$$L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$$

Si n=8, d=1 r=2

$$L = 2 + 14\sqrt{5}$$

1. Para el Cordón de Tienda

$$L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$$

Si n=8, d=1 r=2

$$L = 14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53}$$

Se observa que la longitud más corta es la del encordonado al estilo americano,el encordonado en cruz.
Ahora bien, ¿podemos estar seguro de que esto será siempre así o por el contrario, es posible que el resultado dependa de los valores de **“n”, ”d” y “r”?**
¡Sólo un matemático se preocuparía por los diferentes casos que aparecerían dando valores distintos a “n”, “d” y “r”!
Este es un buen ejercicio para proponer a los alumnos y que puedan hacer un estudio exhaustivo de los diferentes tipos de encordonados y establecer comparaciones objetivas con “OJOS” DE CLIENTES U “OJOS DEL FABRICANTE”.

SPM-4. (C): CAMBIOS DE CUADROS Y DE REGISTROS
Igual que los casos anteriores podíamos elaborar una la lista no exhaustiva en cuanto a situaciones y contenidos. Pero no olvidando las necesarias asociaciones de los cuadros donde interviene la geometría, la teoría gráfica, teoría algebraica, y diferentes partes de las matemáticas. A modo de resumen, y como propuesta a los alumnos, presentamos las situaciones reales siguientes.

CASO 6. A LA BÚSQUEDA DE LA GENERACIÓN PERDIDA

Este es un ejemplo muy interesante ya que podemos terminar el estudio de una noción por un problema abierto. Este ejemplo permite detectar errores que no aparecen en algunos ejercicios más clásicos en secundaria. Dice así.

Cada corona circular representa una generación. En el centro se sitúa el alumno ocupando la generación "0", rodeado de otra corona que corresponde a los dos padres que forman la generación"1". Se sitúa a continuación sus abuelos del lado poaternal y del lado maternal que forman la generación "2" y a continuación la generación "3".

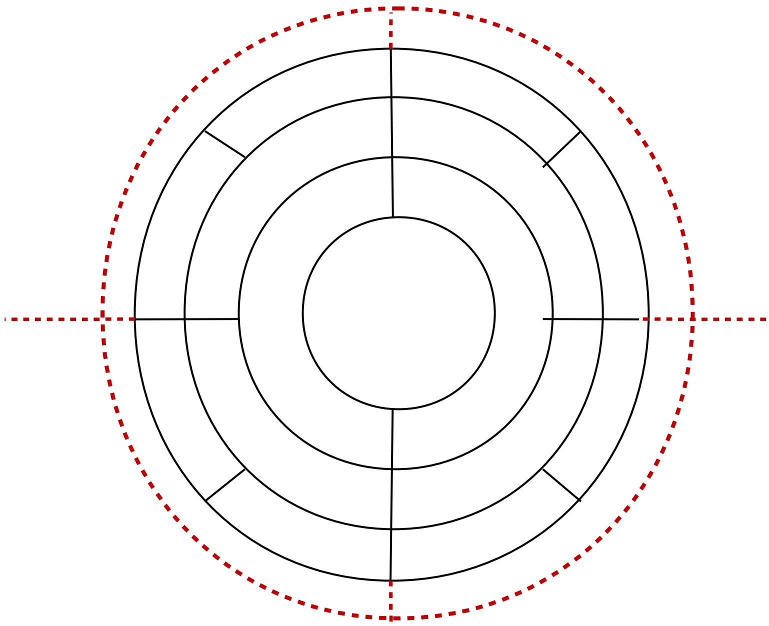


Fig. 16. Generaciones perdidas

El principio del problema propuesto es estudiar el número de miembros de las generaciones pasadas [9]. Este modelo puede servir para estudiar la evolución de determinadas especies, como puede ser la población de determinadas bacterias. Surge inmediatamente la siguiente cuestión:

¿Cuál es la primera generación que incluye más de un millar de personas?

6. A modo de conclusión.

Dos reflexiones interesantes a tener en cuenta**:**
"Las matemáticas son un producto de las mentes humanas pero no pueden someterse a la voluntad humana. Explorarlas es como explorar un nuevo sendero en el terreno; quizá no sabes lo que hay en la siguiente curva del río, pero no tienes que escoger. Sólo puedes esperar y descubrirlo. Pero el terreno matemático no existe hasta que uno lo explora."

Stewart, I.
Cartas a una joven matemática

“Lo que el profesor dice en clase no carece de importancia, pero lo que los alumnos piensan es mil veces más importante. Las ideas deben nacer en la mente de los alumnos y el profesor debe actuar tan sólo como una comadrona”.

Polya

Con lo anteriormente expuesto se puede encontrar una clara evidencia en los enunciados relativos a la modelización matemática:
a. Es posible identificar lo que podría llamarse una teoría para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática y que tal teoría puede usarse como base para el desarrollo de la práctica de la enseñanza de la matemática.
b. En particular, esto es cierto para la enseñanza de la matemática en los niveles iniciales de la escuela secundaria. La modelización matemática en este nivel puede ser vista como una forma de aprender matemática así como una meta formativa en sí misma.
c. La teoría continuamente se está desarrollando a través de la interacción entre la reflexión teórica y el desarrollo de las prácticas de enseñanza, y por lo tanto, puede ser considerada como un ejemplo paradigmático de desarrollo teórico dentro de la investigación en educación matemática.
Algunas cuestiones debemos plantearnos para fundamentar y justificar el tema de la modelización:
¿Qué aspectos del proceso de creación y/o descubrimiento en Matemáticas debemos focalizar para que al ser llevados al aula podamos conseguir los objetivos didácticos que nos hayamos planteado?
¿Podemos en Secundaria o Bachillerato, con el alumnado de estas edades, vivir el proceso utilizando como marco teórico algunas ideas sobre el mismo junto con los modelos de RdP?
Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:
- Profundizar en los métodos propios de investigación en matemáticas: la particularización, la búsqueda de leyes generales, la construcción de modelos, la generalización, el uso de analogías, conjeturas y demostraciones.
- Utilizar modelos matemáticos para la matematización de la realidad y la resolución de problemas, experimentando su validez y utilidad, criticando sus limitaciones, mejorándolos y comunicando sus resultados y conclusiones
Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:
- Practicar la resolución de problemas como la actividad más genuina en cualquier campo específico de las matemáticas.
- Acercar a los alumnos y alumnas a los conocimientos matemáticos priorizando el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de modelos explicativos, la indagación y el descubrimiento.
- Propiciar que los alumnos/as vean el verdadero rostro de las matemáticas, asumiendo en muchos momentos el papel de matemático investigador.
- Preparar a nuestros estudiantes para la invención, incrementando el gusto por ella y *regando sus gérmenes inventivos.*
- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza del conocimiento y quehacer matemático y sus resultados.

Estos planteamientos didácticos deben ir acompañados de una reflexión personal sobre las principales ideas que pueden ayudar a situarnos en cada momento o a explicarnos, de manera coherente, el tipo de situaciones que están pasando o que nos vamos encontrando.
Conviene recordar los distintos niveles de resultados, que podemos obtener en el tratamiento de la información a lo largo del proceso:

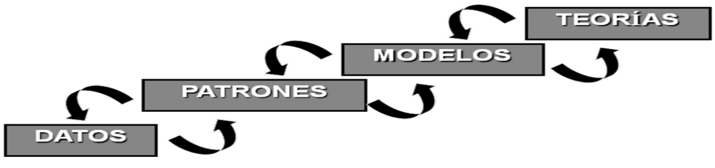


Fig.17. Tratamiento de la información en el proceso

Si nos centramos en la construcción de modelos, nuestro marco de referencia sitúa esta tarea dentro del proceso de *matematización* de la realidad, caracterizado también por la puesta en práctica de estrategias de pensamiento útiles en cada fase.
Así, nos permitimos, por último, aportar algunas orientaciones para profesores. A nuestro juicio**,** debe:
-Tener como objetivo prioritario el proceso, no la solución de la actividad
-Ser consciente de que casi todos los problemas y situaciones pueden hacerse ideales.
-Tener en cuenta que los conceptos de "problema real" o "realidad matematizable" son subjetivos.
Y por último uno de los ingredientes más importantes de nuestro trabajo según C. de la Fuente:*"...el entusiasmo del profesor/a, el disfrute personal con lo que decimos y hacemos en clase son virus muy contagiosos para bastantes estudiantes…"*

¡Qué así sea desde la modelización!

7. Referencias bibliográficas

[1] Blomhøj, m. (2004) "Mathematical modelling - A theory for practice." En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. &Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learningand Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

[2]Gras,R., Bardy, P., Parzysz, B., Pecal, M., Richeton , J.P.(2007). "Pour un enseignement problematisé des Mathématiques au Lycée". APMEP, Ed. Tome 1,págs. 5-6. París (Francia).

[3] Gras,R., Bardy, P., Parzysz, B., Pecal, M., Richeton , J.P. (2007). "Pour un enseignement problematisé des Mathématiques au Lycée". APMEP,.Ed.. Tome 2,págs.13-19, págs. 32-33, págs.52-53, págs. 152-155, 165-166. París (Francia)

[4]Niss, M. (1989)." Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula." En W. Blum, y otros (Eds), "Applications and modelling in learning and teaching mathematics," (p. 22-31). Chicester, UK: Horwood Publishing.

[5]Romero, S. (2000). "Matematización de la cultura. Límites y asedios a la racionalidad". Rev. Epsilón. SAEM Thales. Nº 48, págs.409-420. Sevilla (España).

[6]Romero, S., Benítez, R. (2008), "De la Jungla de Cristal III a las ecuaciones diofánticas pasando por el algoritmo de Euclides". Rev. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", págs. 7-26. Sevilla (España).

[7]Romero, S., Castro, F. (2008). "Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior. El problema de Dobogókó". Vol.2, págs.. 11-23 Modelling in Science Education and Learning. Valencia (España).

[8] Langlois, F. (1995). "Influencia de la formulación del enunciado y del control didáctico sobre la actividad intelectual de los alumnos en la resolución de problemas". Enseñanza de las Ciencias ,p. 179 – 192. Vol. 13, No. 2.España

[9] Butz, F.(2005). " À la recherche de la génération perdue". Maths, autres disciplines, modélisation. Bulletin, 456,págs.. 21-22. París (Francia).

[10] Aravena M. Caamaño E.C. (2007). "Modelizacion matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile". Estudios Pedagógicos XXXIII, N° 2, págs.7-25.Chile.