

## **Título: “La significación del lenguaje matemático”**

**Ponente: Ramón Galán González.**

La práctica totalidad de mi vida profesional, la he dedicado a la formación del profesorado y a la investigación sobre la didáctica de las matemáticas en el ámbito de la Educación Infantil y de la Educación Primaria, combinando los aspectos teóricos y prácticos. El hecho de impartir innumerables cursos dirigidos al profesorado y, posteriormente, entrar en las aulas con los alumnos de esos profesores y llevar a la práctica, de forma real y efectiva, los aspectos teóricos, me ha servido para detectar y conocer los problemas y las dificultades que muestran los alumnos y los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas referidas a los Etapas Educativas antes mencionadas.

La amplitud del número de profesores con los que en la actualidad estoy colaborando y los grupos de alumnos con los que diariamente estoy trabajando, hacen que la muestra, aunque sin cuantificar, sea lo suficientemente significativa tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo y, por ello, generalizar afirmaciones y conclusiones.

Los problemas y dificultades que he detectado en la práctica docente hacen referencia fundamentalmente y entre otros a:

- La construcción de los conceptos y contenidos matemáticos.
- Aspectos metodológicos.
- Estrategias de aprendizajes.
- Recursos didácticos.
- Resolución de problemas.

Todo ello provoca, como resultado final, un aprendizaje aparente de las matemáticas carente de significación, sin utilidad, separada de la vida concreta, con un altísimo grado de abstracción, con un predominio de los algoritmos matemáticos clásicos, caprichosos, sin sentido, sin justificación ni interiorización de los mismos, unos contenidos matemáticos concebidos como compartimentos estancos, un aprendizaje que, en definitiva, no desarrolla capacidades en los alumnos ni los hace competentes para afrontar retos y problemas en la relación práctica con la vida real.

Los alumnos se relacionan con las matemáticas como la realización de innumerables ejercicios escritos, ejercicios con meros signos gráficos pertenecientes al lenguaje matemático, donde el punto de partida, el proceso y el resultado carecen de significación alguna. Todo ello, les lleva a plantearse la siguiente pregunta: “*Maestro, ¿las matemáticas para qué sirven?*”. A fuerza de ser sincero tendríamos que decirles: “*Como te las estoy enseñando, para poco te sirven*”

Sin ánimo de proyectar una visión pesimista, me veo en la obligación de afirmar que es la realidad predominante, que día a día veo y compruebo en las aulas. Ello no quiere decir, que no haya docentes ni realidades que escapen a lo que acabo de afirmar pero que no dejan de ser excepciones que confirman la regla. Esta realidad que describo, en lugar de provocarme una actitud de resignación, me anima a combatir y a asumir un compromiso social junto con un número cada vez mayor de compañeros de la isla de Gran Canaria, con el fin de transformar y dignificar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El problema o la tarea tiene múltiples lados y caras. Es una realidad poliédrica. Una realidad conformada por muchas determinaciones y momentos interrelacionados entre sí. Uno de ellos hace referencia a la significación del lenguaje matemático.

Analicemos las cosas más de cerca. En primer lugar veamos algunos ejercicios matemáticos que alumnos de distintas edades realizan.

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 475 \\ \hline 764 \end{array} \quad (\text{Alumnos de 7 y 8 años})$$

El lenguaje matemático que expresa la operación indicada no hace referencia a ninguna realidad sensible del mundo exterior y, por ello, es una expresión lingüística dotada de un altísimo grado de abstracción. En otros términos: “289 ¿qué? más 475 ¿qué? es igual a 764 ¿qué?” Hay que responder: “A nada y a cualquier cosa al mismo tiempo”. Precisamente este hecho es uno de los males que aqueja a la enseñanza de las matemáticas en los niveles iniciales de la Educación Primaria: el altísimo grado de abstracción del lenguaje matemático empleado y su consiguiente falta de significación para el alumno.

Supongamos que concretamos el lenguaje matemático empleado y los números que intervienen en dicha operación hicieran referencia a cantidades de dinero, a euros. Entonces la pregunta que nos planteamos es la siguiente: ¿Cuándo un niño de siete u ocho años ha tenido una relación práctica, en la vida real, con esas cantidades de dinero? La respuesta es: nunca.

La consecuencia es que el lenguaje matemático para el niño carece de significación en tanto no expresa ninguna relación práctica con la vida de los alumnos.

Veamos otro ejemplo:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{2}$$

Los alumnos, a dictamen del profesor, multiplican en cruz y escriben el resultado

final. Formulamos las siguientes preguntas algunas de ellas planteadas a su modo por los propios alumnos:

- ¿Qué significado, o que expresan, o manifiestan, o qué papel desempeña cada una de las fracciones que intervienen en esta operación de dividir?
- ¿Cómo es posible que al dividir tres mitades, por ejemplo, tres botellas de medio litro, en quintas partes nos dé como resultado 15 mitades, es decir, 15 botellas de medio litro?
- ¿En qué realidad sensible del mundo exterior se manifiesta la operación indicada?
- ¿Por qué hay que multiplicar en cruz, más allá de la razón lógica teórica que afirma que dividir dos números es igual a la multiplicación por el inverso y que un alumno de 12 años no entiende?
- ¿Qué significación tiene para el alumno, en definitiva, el lenguaje matemático escrito que hemos empleado?

Veamos un último ejemplo constatado de forma experimental en innumerables ocasiones tanto con profesores como con alumnos y que hace referencia al mismo concepto de número. Escribimos en la pizarra el número  $4,125 \text{ m}^2$  y formulamos la siguiente pregunta: *“El número que hemos escrito significa cuatro metros cuadrados enteros y ciento veinticinco ¿qué? ¿Decímetros, centímetros o milímetros cuadrados?”* En muy raras ocasiones, tanto profesores como alumnos, han logrado dar una respuesta correcta. Sin embargo, expresiones equivalentes aparecen como resultado final de ejercicios o problemas matemáticos que a menudo se resuelven en las aulas.

Los ejemplos citados ponen de manifiesto que una de las variables intervinientes que dan lugar al fracaso, al rechazo, a la incomprensión de las matemáticas en nuestras aulas reside en la falta de significación del lenguaje matemático empleado.

Una vez constatado este hecho, nuestro siguiente paso fue tratar de encontrar la causa de este problema que afecta al lenguaje matemático y, con ello, ofertar una alternativa que lo corrigiese.

En primer lugar nos planteamos en qué esfera del conocimiento podríamos encontrar la respuesta. Para ello partimos de dos premisas:

- El lenguaje matemático está subrogado al habla.
- El lenguaje matemático, en tanto relación signo y significado, es un caso particular incluido dentro de la relación pensamiento y lenguaje.

Estas dos premisas básicas nos condujeron a buscar la respuesta en las esferas de la teoría del conocimiento y de la filosofía del lenguaje. De forma muy sintética, ya que no es el objeto de la presente exposición, llegamos a los siguientes presupuestos teóricos.

El conocimiento que posibilita al hombre la adecuada interpretación y transformación del mundo exterior es un proceso que recorre tres momentos o fases:

La fase de la percepción. El mundo exterior se presenta ante el hombre como una realidad sensible, objetiva y externa mediante la intervención mancomunada de los órganos de los sentidos. Cuando esta relación es contemplativa, interviene fundamentalmente la percepción visual a través del órgano de la vista. En esta relación el objeto, el mundo, le viene dado al sujeto, al hombre. El mundo se duplica: el mundo en el exterior, como realidad sensible, y como imagen de dicho mundo en la conciencia del sujeto. Cuando esta relación es práctica, interviene fundamentalmente la percepción táctil a través de las manos en una acción encaminada a un fin y dirigidas por el pensamiento. El hombre no solamente contempla sino que modifica el mundo exterior. Luego, ojos, manos, conciencia y pensamiento desempeñan un papel decisivo en esta fase.

La fase de la representación. El mundo exterior no se presenta ya ante el hombre como una realidad sensible. No intervienen ya los órganos de los sentidos. El mundo, los objetos, las acciones que con ellos realiza, no les vienen dados al hombre sino que es el propio hombre quien los rememora en su conciencia, en su pensamiento. Ahora en esta fase, la acción que realiza el hombre solamente tiene lugar como pensamiento en movimiento y tiene lugar únicamente en su conciencia. Don Quijote veía, percibía, molinos de viento, sin embargo, se los representaba en su interior, en su conciencia, en su pensar, como gigantes. La locura de Don Quijote consistía en la inadecuación entre su percepción y su representación.

La fase del concepto o abstracción. Cuando la representación sustituye a la percepción, el mundo y las acciones que realizamos en el mundo se objetivan en nuestra conciencia, en nuestro pensamiento, por medio del lenguaje. En esta fase el pensamiento se independiza de la percepción y la representación y el pensamiento se transforma en puro lenguaje, hasta llegar a un punto de abstracción que en nuestro lenguaje no quede rastro alguno de percepción ni representación. Dicho en otros términos: el lenguaje es la objetivación del pensamiento, es decir, nuestro pensamiento sale fuera de nuestra conciencia al exterior en forma de lenguaje.

En la fase de la percepción vemos o hacemos una mesa en concreto. En la fase de la representación rememoramos en nuestra conciencia una mesa o el modo de hacer una mesa en particular. En la fase de la abstracción y mediante el uso del lenguaje, de las palabras, de las configuraciones fónicas o gráficas, construimos el concepto de mesa. Ya no es un objeto concreto ni particular sino que son universales y con ello objetivamos y significamos a una clase de objetos a los que llamamos mesa.

En este sentido, el lenguaje realiza tres funciones:

La función indicativa. Se emplea en la fase de la percepción, como señal indicativa del objeto que percibimos.

La función nominativa. Se emplea fundamentalmente en la fase de la representación, dada la ausencia del objeto nombrado. Dicho de otra manera: el salto de la configuración fónica o gráfica en su uso como función indicativa a su uso como función nominativa es el salto de la percepción a la representación.

La función significativa. Se emplea en la fase del concepto o abstracción. Ahora no solamente ponemos nombre a los objetos sino que los llenamos de un contenido significativo.

Lo que acabamos de exponer pudiera parecer extraño, o tal vez divagaciones teóricas ajenas y que poco tiene que ver con el objeto de nuestras investigaciones sobre didáctica de las matemáticas. Sin embargo, nosotros las consideramos necesarias si queremos que nuestras alternativas sean propuestas rigurosas y no meras especulaciones o simples ocurrencias.

Llegados a este punto, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo podríamos aplicar, o hacer efectivo en términos prácticos estos presupuestos teóricos que acabamos de exponer en relación a la enseñanza de las matemáticas y más concretamente en lo que toca a la significación del lenguaje matemático? Diseñando situaciones de aprendizajes donde al alumno, a través de su actividad, recorra las tres fases del conocimiento y objetive su hacer y su pensar mediante el lenguaje matemático haciendo uso de las tres funciones. Pasemos a analizar cada una de ellas.

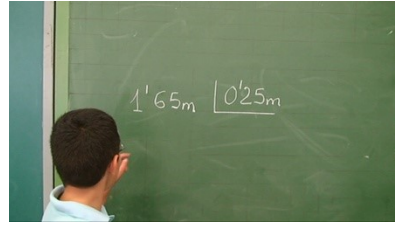
Fase de la percepción y la actividad práctica.

Los alumnos se enfrentan a una actividad práctica que tiene que realizar con objetos del mundo exterior. En esta fase intervienen ojos, manos y pensamiento. La vista les proporciona la percepción visual de la situación inicial. El pensamiento dirigirá la acción conforme al fin perseguido y las manos realizarán dicha acción.

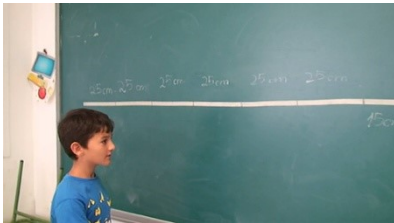
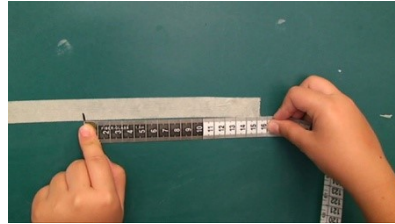
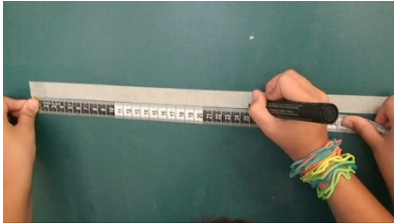
Exponemos, como ejemplo, una situación de aprendizaje realizada con alumnos de 3º de Educación Primaria. En estos momentos los alumnos, de forma previa, ya han aprendido a medir longitudes y expresar esas medidas en forma de números decimales referidas al metro.

Les proporcionamos a los alumnos una cinta que mide 1,65 metros y una cinta métrica donde pueden percibirse de manera clara decímetros y centímetros. Les decimos que la tarea consiste en dividir la cinta en trozos de 0,25 metros.

Los alumnos miden la cinta y averiguan que mide 1,65 m. A continuación les solicitamos que escriban en forma de operación matemática la tarea que tienen que realizar.

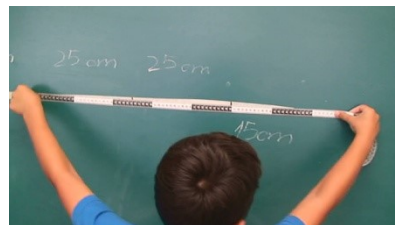
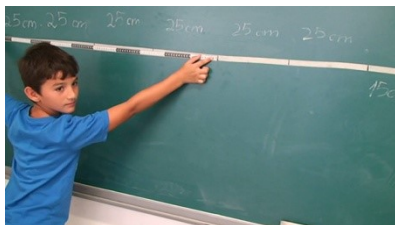


A continuación dividen la cinta en trozos de 0,25 m ó 25 cm y comprueban que obtienen 6 trozos y que le sobran 15 cm. Escriben el resultado obtenido en la pizarra.

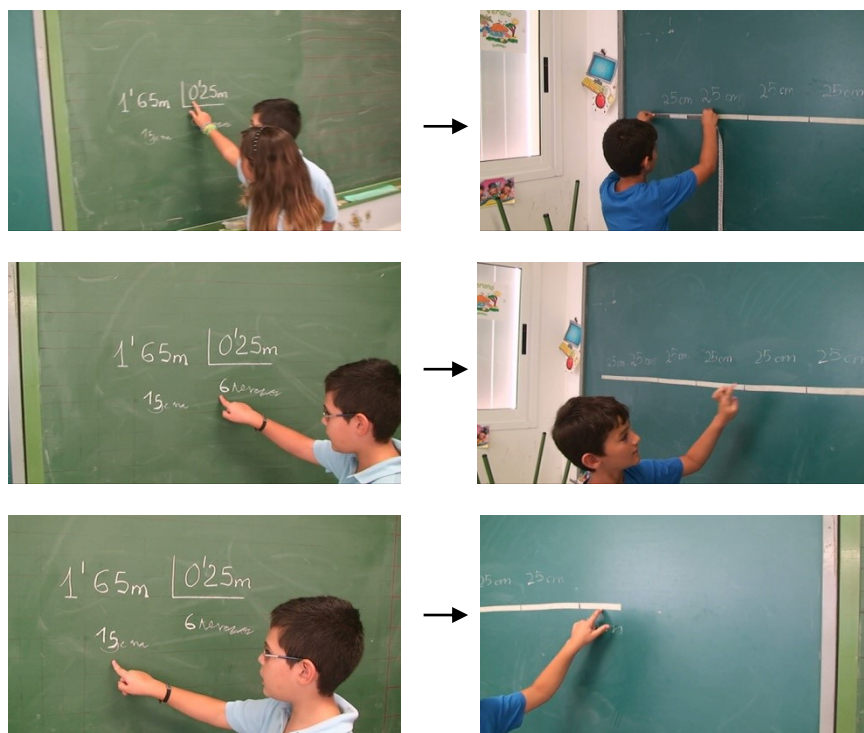


Llegados a este punto, y con el propósito de verificar la significación del lenguaje empleado, hacemos uso de la función indicativa del lenguaje, es decir, relacionamos lenguaje y percepción. Como dicen los alumnos: “*Todo lo que escribimos lo tenemos que ver*”. De este modo unos alumnos a otros preguntan:

- ¿Desde dónde hasta donde llega el número 1,65 m?
- ¿Desde dónde hasta dónde llega la parte entera del número 1,65 m?
- ¿Desde dónde hasta dónde llega la parte decimal del número 1,65 m?



- ¿Dónde está el número 0,25?
- ¿Dónde está el número 6?
- ¿Dónde ves el número 15?



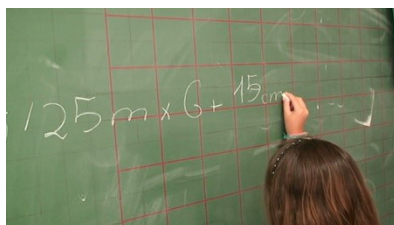
(Mediante este enlace pueden visualizar el vídeo de la situación de aprendizaje que acabamos de exponer: <https://youtu.be/QKMr6Wll3dU>)

Ahora tenemos la certeza absoluta de que el lenguaje que expresa la acción que acaban de realizar los alumnos, así como el resultado obtenido tiene plena y completa significación para ellos. Los alumnos saben que 1,65 m expresa la longitud total de la cinta, que 0,25 representa la longitud que mide cada parte, que el 6 del cociente hace referencia al número de trozos que hemos obtenido y el 15 del resto, los centímetros que nos han sobrado. Pero también saben que de los cuatro números intervinientes, tres de ellos (1,65; 0,25 y 16) expresan longitud pero que el cuarto número, el número 6, no expresa longitud sino número de partes o veces.

Ahora el lenguaje matemático que emplean los alumnos tiene significación porque ha salido como resultado de una actividad práctica realizada por ellos mismos, porque todo lo que escriben (lenguaje) lo pueden ver (percepción). El lenguaje matemático ahora nos remite a una situación concreta y real careciendo, por ello, de la altísima abstracción que observamos en las aulas.

Al principio, teníamos la cinta completa. Al final, aparece dividida en trozos. Al final percibimos algo distinto de lo que hacíamos al principio. Lo que percibimos al final, lo podemos expresar de otro modo diferente. Preguntamos a los alumnos.

- *Veo 6 trozos de 0,25 m, es decir, de 25 cm más un trozo de 15 cm. ¿Cómo podríamos expresar lo que vemos? En forma de multiplicación más una suma.*



De nuevo en este lenguaje matemático podemos “ver” todos y cada uno de los términos que empleamos y verificar mediante la percepción su significación.

### **Fase de la representación.**

Después de realizar situaciones de aprendizaje similares es cuando podemos pasar a la resolución de problemas escritos, no antes. Ahora, ya no realizaremos la actividad de forma práctica, de forma real, sino representada. Ahora no interviene la percepción, es decir, no tenemos cinta métrica, no vemos la cinta, ni medimos longitudes, ni podremos contar los trozos obtenidos. En todo caso podemos ayudarnos de un dibujo, de una representación gráfica que haga referencia al resultado de la actividad práctica. Estamos, por ello, en la fase de la representación.

Planteamos ejercicios como el siguiente:

*Tenemos un listón de madera que mide 3 metros y queremos partirlo en trozos de 0,4 m. ¿Cuántos trozos obtenemos? ¿Sobraré algo? ¿Cuánto medirá lo que sobra?*

Ahora todo ocurrirá en el pensamiento del alumno. Posiblemente, alguno de ellos irá sumando de manera sucesiva 4 decímetros, es decir, 40 centímetros hasta llegar a los 300 centímetros que mide el listón pero sin sobrepasar esta longitud. Otros, pensará la longitud en decímetros y multiplicará 4 dm por 7 trozos es igual a 28 decímetros y sobran 2 decímetros. Precisamente se trata de eso: de que cada alumno busque su propia estrategia. Al final, las distintas estrategias empleadas se compartirán con todo el grupo clase. Para ello, tendrán que emplear el lenguaje matemático. Un lenguaje matemático que ha perdido su relación directa con la percepción pero que mantiene su significación porque procede de ella. Ahora el lenguaje matemático no niega la percepción sino que la supera.

Unos expresarán la operación que ha tenido lugar en su pensamiento en forma de metros. Otros, en forma de decímetros. Otros, pensando en centímetros. De forma que escribirán.

$$3 \text{ m} : 0,4 \text{ m} = 7 \text{ trozos} + 0,2 \text{ m.}$$

$$30 \text{ dm} : 4 \text{ dm} = 7 \text{ trozos} + 2 \text{ dm.}$$

$$300 \text{ cm} : 40 \text{ cm} = 7 \text{ trozos} + 20 \text{ cm.}$$



De esta manera podemos comprobar que la acción es la misma: dividir una longitud en partes con una determinada longitud. Pero su expresión en forma de lenguaje matemático puede adoptar diversas formas: empleando números decimales o empleando números naturales. Con ello, se rompe la falsa idea que operar con números decimales es más difícil que hacerlo con los enteros positivos.

En el curso del análisis de las distintas estrategias empleadas podemos concluir, según expresemos la acción realizada en metros, decímetros o centímetros, que:

$$3 \text{ m } \overline{)0,4 \text{ m}} \quad \Longrightarrow \quad 30 \text{ dm } \overline{)4 \text{ dm}} \quad \Longrightarrow \quad 300 \text{ cm } \overline{)40 \text{ cm}}$$

Los alumnos de manera natural deducen que para “quitar las cifras decimales en una división” basta expresar los metros en decímetros o centímetros pero que el ejercicio sigue siendo el mismo. No es necesario que nadie les diga que: “hay que multiplicar el dividendo y el divisor...” o que “hay que correr la coma hacia un lugar o hacia otro” como sucede normalmente en las aulas que visito.

### **Fase de la abstracción.**

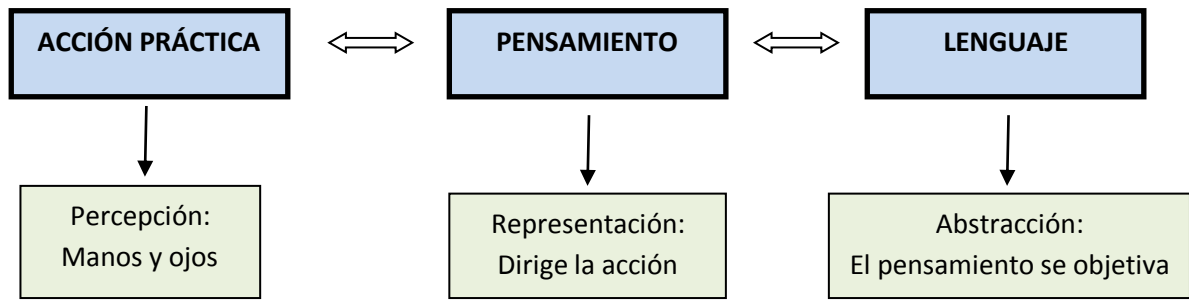
Finalmente, y solo después de realizar situaciones prácticas y representadas referidas a distintos tipos de medida (monetarias, de capacidad, etc.), es cuando podemos pasar a la fase de la abstracción. Ahora los números y las operaciones no se refieren a ninguna medida o cantidad de objetos concretos. Son números en abstracto. Borrarnos cualquier referencia al mundo sensible exterior. Llegamos al lenguaje abstracto en su más puro sentido pero llegamos a él después de un largo recorrido.

Precisamente el error que se produce y que conlleva a que el lenguaje matemático, y el aprendizaje de las matemáticas en general, carezca de significación y de utilidad para los alumnos reside en que comenzamos a emplear este lenguaje, desde edades muy tempranas y sin recorrer la fase de la realización práctica, de la percepción ni la de la representación.

Directamente enfrentamos a los alumnos con operaciones del tipo: (Seguimos con el ejemplo)

$$1,65 : 0,25 \qquad 0,25 \times 6 + 0,15$$

Luego y en definitiva, si queremos que el lenguaje matemático adquiera significación y sentido para nuestros alumnos es necesario vincular tres pilares fundamentales: acción, pensamiento y lenguaje.



Veamos un ejemplo de cómo vincular la acción con una compleja expresión lingüística matemática. El alumno irá ejecutando la acción empleando las regletas del metro y el franelograma. La alumna expresará la acción en términos de lenguaje matemático. Hay que observar que en todo momento existirá una conexión exacta entre lo que percibimos en el franelograma con lo que se escribe en la pizarra.

La actividad consiste en realizar la operación matemática que aparece en la imagen inicial.



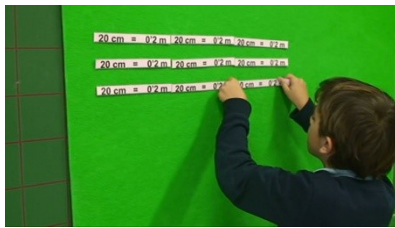
La acción comienza colocando en el franelograma un metro. A ese metro hay que quitarle  $\frac{2}{5}$  partes. Pero no hay quintas partes. El alumno transforma el metro en cinco regletas de la quinta parte. La alumna escribe lo que aparece ahora en el franelograma. Ya no tenemos un metro sino cinco quintas partes.



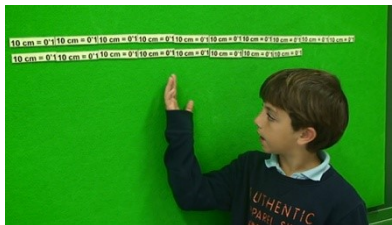
El alumno procede a quitar  $\frac{2}{5}$ . Le quedarán  $\frac{3}{5}$ , es decir, tres regletas de la quinta parte. La alumna escribe lo que va viendo en el franelograma.



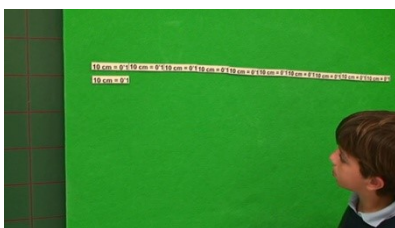
Como tenemos que multiplicar  $\frac{3}{5}$  por 3, el alumno coloca tres veces 3 regletas de la quinta parte, con lo que obtiene 9 regletas de la quinta parte, es decir,  $\frac{9}{5}$ . La alumna por su parte escribe con lenguaje matemático el nuevo resultado obtenido.



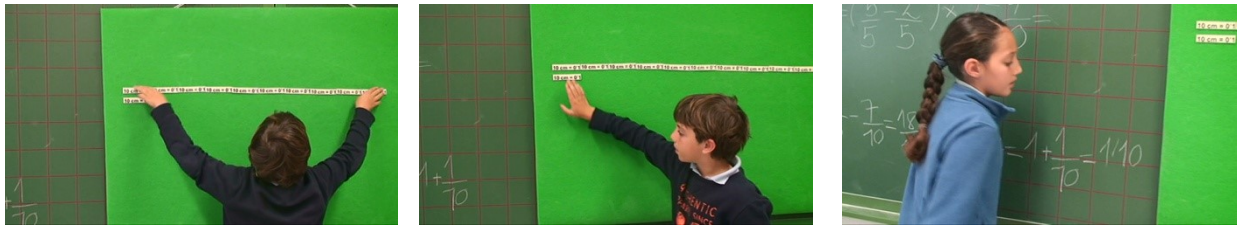
El siguiente paso consiste en:  $\frac{9}{5} - \frac{7}{10}$ . Para posibilitar esta resta, el alumno se ve obligado a cambiar cada regleta de la quinta parte por dos regletas de la décima parte, es decir a transformar  $\frac{9}{5}$  en  $\frac{18}{10}$ . La alumna escribe el nuevo resultado que ve ahora en el franelograma.



Ahora el alumno sí puede realizar la acción de restar  $\frac{7}{10}$  partes. Le quedarán 11 regletas de la décima parte. La alumna escribirá ese resultado.



La alumna escribe el resultado final en forma de número mixto y en forma de número decimal. El alumno señala en el franelograma la parte entera del número mixto y del número decimal que lo ve en la parte de arriba. Igualmente señala la fracción del número mixto o la parte decimal del número decimal, que lo ve en la parte de abajo.



(Mediante este enlace pueden visualizar el vídeo de la situación de aprendizaje que acabamos de exponer: <https://youtu.be/vZO7GI-MiZ0>)

En el trasfondo de toda la exposición, y en esencia, he tratado de poner de manifiesto que la carencia de significación del lenguaje matemático que se produce en las aulas es consecuencia de una inadecuada metodología dominante. Si lo que queremos es que nuestros alumnos encuentren significación y sentido a las matemáticas que día a día van aprendiendo, no queda más remedio que cambiar a un nuevo enfoque metodológico, a una metodología activa, interrelacionando acción, pensamiento y lenguaje.