Una misma solución puede no ser una misma solución

Abel Martín; Marta Martín Sierra

email: aulamatematica@gmail.com ; martams13@gmail.com

IES Pérez de Ayala, Oviedo – Asturias y Cátedra de Inteligencia Analítica Avanzada de la Universidad de Oviedo

RESUMEN

La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. La experiencia realizada durante el curso 2014-2015 con alumnos de segundo de Bachillerato da respuesta a estos objetivos, aderezada con la ayuda de una calculadora científica y con el análisis crítico, la reflexión y la continua toma de decisiones a la hora de interpretar las soluciones obtenidas...

Ecuaciones, sistemas, interpretación, contexto, reflexión, JAEM; Cartagena

Una misma solución puede no ser una misma solución

Introducción

Con anterioridad a esta sesión hemos abordado en el aula la primera parte del tema que se encarga de estudiar los sistemas de ecuaciones, donde habremos trabajado y evaluado el grado de consecución de los siguientes contenidos:

- Los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (tanteo, reducción, igualación, sustitución, gráfico), eligiendo el método más adecuado, según el tipo de ejercicio y empleando adecuadamente la estrategia elegida.

- La interpretación geométrica para sistemas con 2 o más ecuaciones y con 2 o más incógnitas, y los nombres que reciben los distintos sistemas a la vista de las soluciones obtenidas.

- La utilización del método de Gauss para sistemas de primer grado con 3 ecuaciones y 3 incógnitas, acompañada de su interpretación geométrica.

Ahora nos encargaremos de una segunda parte del tema, conscientes de que la resolución de problemas constituye un eje fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico.

Competencias que intervienen

La enseñanza de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales debe comenzarse teniendo en cuenta el grado de adquisición de la competencia matemática que el alumnado ha logrado a largo de la ESO. Para lograr dicha continuidad, al igual que ocurre en el currículo básico de las asignaturas de matemáticas de la ESO, los conocimientos, las competencias y los valores están integrados y se han formulado los estándares de aprendizaje evaluables teniendo en cuenta la relación necesaria entre dichos elementos, también en Bachillerato. Ampliemos otros aspectos de dichas competencias:

1. Competencia lingüística

En este proceso, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos, el alumnado tiene que ir revisando la corrección lingüística, la forma de expresar las ideas y su adecuación conceptual con el rigor científico propio de las matemáticas.

2. Competencia matemática.

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos, las formas de expresión y el razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral, fomentando una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.) que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento. A lo largo del trabajo, como su propio título indica, se incrementará la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarnos a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad.

3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.

La importancia del contexto en el que se desarrollan las situaciones planteadas y su relación con las matemáticas es el objetivo explícito de nuestro trabajo.

4. Tratamiento de la información y competencia digital.

La presentación de este tipo de tareas, se fundamente en un trabajo colaborativo que parte de actividades que se desarrollan en la Web desde la que trabajamos. Esto ha sido posible gracias al diseño del portal dinámico que soporta la gestión de la información procesada desde www.aulamatematica.com. El alumnado que participa en esta experiencia didáctica, en paralelo con la competencia de desarrollo del conocimiento científico, se encuentra con la indudable motivación de construir un sitio colaborativo en Internet con su trabajo. La realización del trabajo final exige al alumnado destrezas básicas para el tratamiento de la información, la manipulación digital de imágenes, su correcta denominación y la ubicación en las redes digitales del Centro, de Internet y con la utilización de herramientas auxiliares, como pueden ser las calculadoras adecuadas para la realización de este tipo de tareas.

5. Competencia social y ciudadana.

Una consecuencia indirecta es el desarrollo de la competencia ciudadana: las compras, los precios, el ocio, los valores, pertenecen a nuestro acervo cultural y significa hacer consciente el valor de la realidad colectiva, aportando criterios científicos para predecir y tomar decisiones, enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, valorando los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios como formas alternativas de abordar una situación, etc.

6. Competencia cultural y artística.

Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos fundamentales.

7. Competencia para aprender a aprender.

El sentido de iniciativa y emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema. La conciencia, gestión y control de las propias capacidades y conocimientos desde un sentimiento de competencia o eficacia personal, incluyendo tanto el pensamiento estratégico, como la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, todo lo cual se desarrolla a través de experiencias de aprendizaje conscientes y gratificantes, tanto individuales como colectivas. Nadie tiene la razón absoluta, analizar las posibles soluciones aportadas por todos, sus fortalezas, sus debilidades y el espíritu crítico en la elaboración de las respuestas son uno de los pilares básicos en la construcción de estos aprendizajes cooperativos.

8. Autonomía e iniciativa personal.

La perseverancia, la sistematización, la búsqueda de información, el análisis de los problemas, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo cubren ampliamente esta competencia.

Justificación del trabajo propuesto

Analizados los criterios de evaluación para las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I de la LOMCE, referidos al presente tema que nos ocupa, leemos:

"Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares".

Asimismo, en los estándares evaluables, nos comentan:

- Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales.

- Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones.

- Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad.

Pues bien, además de las actividades usuales que se realizan habitualmente en el aula, proponemos este tipo de tareas, repletas de creatividad donde, además de los conocimientos habituales de transcripción al lenguaje algebraico, existe una continua toma de decisiones a la hora de interpretar las soluciones obtenidas.

Desarrollo de las actividades con calculadora científica

Siempre que pensamos en una calculadora científica con capacidad de resolución de sistemas de ecuaciones o en una calculadora gráfica con relación a este tema, tenemos la sensación de que la máquina lo va a hacer todo, pero nada más lejos de la realidad. Si nos fijamos en los aspectos que se presentan para evaluar el conocimiento global, teórico y práctico, que el alumnado tiene del tema, observaríamos que la porción mecánica y rutinaria ya la hemos evaluado en la primera parte del tema y en esta segunda, se resolvería con la ayuda de una herramienta como lo es la calculadora científica de estas características, teniendo en este instrumento un elemento enriquecedor, confiriendo más autonomía y permitiendo ganar tiempo en el análisis y la reflexión en aquellos sistemas que son compatibles determinados.

De hecho, si algún pertinaz opositor a estos métodos quisiera observar la destreza del alumnado en el desarrollo de algún método concreto y valorar el conocimiento de otros métodos (con LÁPIZ Y PAPEL) y no estar con la picaresca de si van a utilizar la calculadora o no, bastaría o bien plantear un sistema incompatible o compatible indeterminado, sistemas que la calculadora interpreta como “ERROR” y no sabe resolverlos.

En nuestro caso utilizaremos y sugerimos la calculadora de la gama fx 570ES PLUS de CASIO o la gama CLASSWIZ fx 570SP X Iberia, también de CASIO, herramientas con un precio muy asequible y grandes prestaciones para desarrollar estos temas.

Objetivos

- Determinar las incógnitas, dentro de un enunciado verbal denso.

- Traducir al lenguaje algebraico dicho enunciado, planteando el problema mediante un sistema de ecuaciones de primer grado.

- Analizar e interpretar críticamente los resultados obtenidos, expresando correctamente la solución, teniendo en cuenta que la resolución de forma mecánica de ejercicios de aplicación inmediata no responde al sentido de este criterio.

Desarrollo de la tarea. Metodología

Abordamos esta parte del tenebroso y apasionante mundo de los sistemas de ecuaciones de primer grado, con el desarrollo de esta tarea en el aula. También hemos realizado previamente ejercicios "tipo" sencillos que permitieron desarrollar los conceptos y procedimientos de resolución de problemas de enunciado verbal.


Nombre y apellidos:

TAREA PROPUESTA 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. APLICACIONES

"UNA MISMA SOLUCIÓN PUEDE NO SER UNA MISMA SOLUCIÓN"

001. (0.25 puntos) En un mercado donde se utiliza una balanza de precisión que discrimina hasta los gramos, has adquirido ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1.2 y 1.5 euros/kg., respectivamente. El importe total de la compra debería de haber sido 13.5704 euros. El peso total de la misma es de 10 kg. y además, has comprado 3148 kg. más de naranjas que de manzanas.
Plantea una sistema de ecuaciones para determinar la cantidad que has comprado de cada producto y comenta los resultados obtenidos.

002. (0.25 puntos) Un cliente de una estación de servicio de gasolina debería de haber pagado un total de 116.664 euros por 24 litros de gasolina normal, 6 litros de una gasolina especial y 42 litros de aceite de oliva. Si sabemos que la relación entre el precio de la gasolina normal y del aceite de oliva es 287/1500 y que el precio del aceite de oliva excede a la suma de los precios de ambas gasolinas en 2 euros, plantea un sistema de ecuaciones que nos permita saber el precio de cada artículo.
Si hoy le doy como propina al chico de la gasolinera el valor de un litro de gasolina normal, mañana le doy al otro chico el de la gasolina especial y pasado mañana a la chica el del aceite de oliva, ¿cuánto les habré dado cada día?

003. (0.25 puntos) A una excursión acuden niños, mujeres y hombres. Sabemos que se reúnen un total de 10 personas y también que el doble de hombres es igual al triple de la suma de mujeres y niños. Si al multiplicar por mil la diferencia entre hombres y mujeres obtenemos 3148, plantea un sistema para calcular cuántos hombres, mujeres y niños hay. Comenta y justifica los resultados obtenidos.

004. (0.25 puntos) Finalmente nos han encargado resolver un sistema para calcular el número de viajes que tenemos que realizar para llevar una cantidad determinada de paquetes, con tres tipos de camiones A, B y C. Después de las operaciones oportunas obtenemos que se necesitan hacer 6 viajes con el camión A pero cuando calculamos los de los camiones B y C obtenemos, respectivamente, 287/250 y 713/250. Por lo tanto, ¿cuántos viajes dirías que habrá que realizar con cada camión para realizar todo el trabajo?

FECHA DE ENTREGA: 6 DE MARZO DE 2016

VALOR MÁXIMO DE LA ACTIVIDAD: 1 PUNTO

1. Tarea entregada

2. Manos a la obra

(a) La actividad se desarrollará en el aula, a lo largo de una sesión, para evitar influencias externas que puedan intervenir en la forma de afrontar los problemas y que la exposición de las opiniones de los participantes sean las propias y las que vayan surgiendo.

(b) Se permitirá la utilización de una calculadora científica capaz de realizar sistemas de ecuaciones.

(c) Se plantea la creación de grupos de dos, con total libertad de constitución. El trabajo será en equipo y pretende la discusión y la toma decisiones conjunta por parte de los integrantes.

(d) Se reparte la propuesta de TAREA a cada equipo con la actividad y varias hojas en blanco. Cada grupo irá transcribiendo en la hoja las estrategias a seguir y los diferentes pasos encaminados a su resolución matemática, justificando, verbalizando y explicando los procedimientos con la ayuda de las herramientas TIC permitidas.

(e) Inicialmente se dejan 5 minutos para que se analice y contextualice la situación planteada en dicha tarea.

(f) Evidentemente las sesiones estarán dirigidas y coordinadas por el profesor que, en los momentos adecuados, hará breves pausas que denominaremos " MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN" encaminadas al intercambio de opiniones, a la observación generalizada y la discusión de las posibles dudas surgidas, cuidando los errores de planteamiento que se vayan cometiendo. El profesorado irá tomando nota de todas aquellas dudas y cuestiones que irán planteando los equipos.

(g) Se fomentará el debate en aquellos puntos que lo requieran y se tomarán decisiones consensuadas, previamente analizadas y descritas en el cuaderno por cada grupo. No obstante, ellos mismos serán los auténticos protagonistas en la autocorrección de los errores de planteamientos y decisiones presuntamente equivocadas. Con el uso de la calculadora dispondremos de más tiempo para insistir en los conceptos.

(h) Será de gran importancia que las actividades vayan acompañadas de un comentario crítico de los pasos y las decisiones tomadas, impulsando la reflexión en todo momento.

(i) Los deslices que se vayan cometiendo serán corregidos pero serán visibles en todo momento para permitir observar el desarrollo y las pautas que hemos seguido en la resolución del problema.

(j) También se valorará la capacidad de expresión, el orden de exposición, concatenación, lenguaje, sintaxis y ortografía.

Criterios de calificación

El profesorado tendrá en cuenta no solo el desarrollo correcto de las actividades propuestas sino el grado de interés, participación, madurez en los comentarios, toma de notas de las revisiones en el proceso de resolución, exposición y defensa de las conclusiones obtenidas y orden en la exposición, capacidad de análisis y establecimiento de pautas de mejora.

3. El profesor supervisa la actividad

4. Coordinando las dudas de los grupos

Actividad 1

En un mercado donde que utiliza una balanza de precisión que discrimina hasta los gramos, has adquirido ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1.2 y 1.5 euros/Kg, respectivamente. El importe total de la compra debería de haber sido 13'5704 euros. El peso total de la misma es de 10 Kg y además, has comprado 3'148 Kg más de naranjas que de manzanas. Plantea una sistema de ecuaciones para determinar la cantidad que has comprado de cada producto y comenta los resultados obtenidos.

5. Balanza de precisión

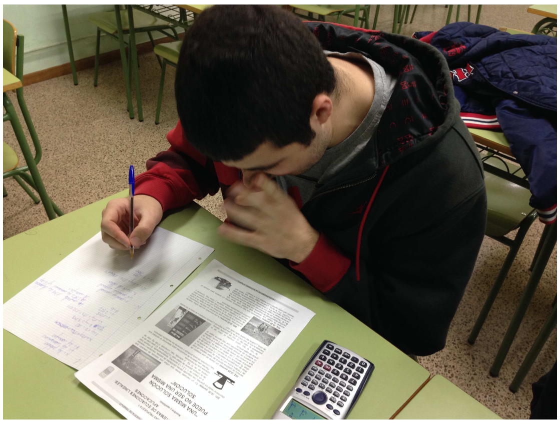
CURIOSIDADES iniciales

Los grupos suelen conformarse utilizando el criterio de amistad. Hay un número impar de alumnos y el "sobrante" en ningún momento cuestiona colocarse con otros 2 y formar un grupo de 3. Lo intenta solo: prefiere la individualidad a juntar fuerzas y debatir estrategias de resolución y cálculo.

Varias personas no entienden el término "discriminan" en este contexto.

La mayor parte inicia la primera actividad de una forma irreflexiva, cada uno va por su lado con la idea, parece ser, de ir haciendo puestas en común de forma posterior

6. Sin colaboración inicial



7. Cada uno a lo suyo

También surge la discusión acerca de por qué unas veces el enunciado nos coloca "punto decimal" y otras "coma decimal". Se entabla una puesta en común y se justifican los motivos. Algunos consultan con su móvil y se dedican unos...

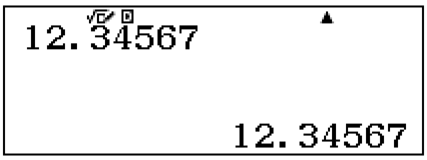
MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

En el aula se observa que unas veces se coloca la coma abajo, otras arriba e incluso un punto, pero… ¿Qué es lo correcto?

NOTA: La RAE, hasta diciembre del 2010, daba preferencia al uso de la coma decimal pero, a partir de esa fecha, ha pasado a recomendar el punto decimal, con la idea de unificar los criterios, muy dispares según la zona geográfica en la que nos encontremos. No obstante nos parece que una cuestión más puramente “técnica” que lingüística debería de guiarse más por la Organización Internacional de Normalización (ISO) donde se recomienda la coma como separador decimal para todos los documentos ISO escritos en cualquier idioma, si bien reconoce que en inglés se usa frecuentemente el punto decimal.

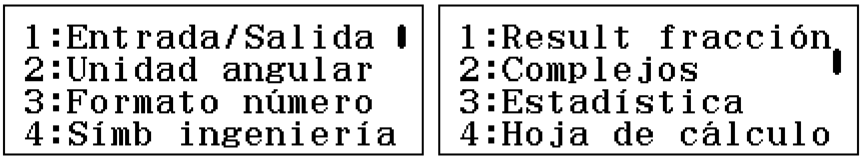
Se toma la decisión de sugerir cierta libertad en este sentido.

Siguiendo con la idea de que cada uno señale la separación de los enteros de los decimales con autonomía, es un buen momento para recordar que la calculadora también te permite modificar el punto que trae incorporado por defecto por una coma decimal en la parte de abajo. Veamos cómo se hace: Vamos a escribir un número decimal en la calculadora, por ejemplo, el 12.34567

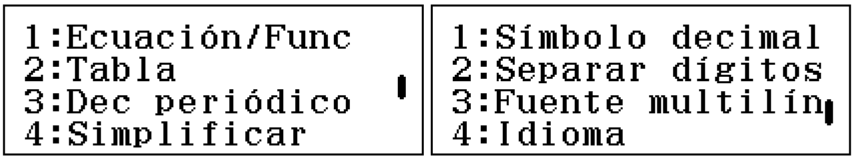


8. Pantalla de la calculadora

Ahora entramos en la opción CONFIG, que permite configurar diversas opciones de acuerdo a las necesidades del usuario. Observamos que la barra de deslizamiento vertical de la derecha de la pantalla está arriba del todo, señalando que el menú de la pantalla es más amplio y que accedemos a la parte oculta presionando el cursor hacia abajo:

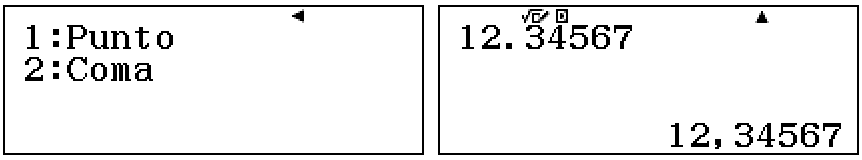


9 y 10. Pantallas de la calculadora



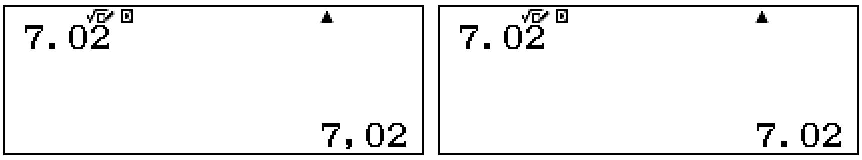
11 y 12. Pantallas de la calculadora

Vamos a modificar el símbolo decimal en el "Display" de la pantalla. Supongamos que queremos colocar la "coma decimal"



13 y 14. Pantallas de la calculadora

A partir de este momento ya tendremos asignada la coma decimal. Practiquemos y escribe siete unidades y dos centésimas. Luego volvamos a colocar el punto decimal.



15 y 16. Pantallas de la calculadora

ACTIVIDAD INTERMEDIA DE INVESTIGACIÓN:

Propón algún ejemplo en el que sea adecuado decantarse por una notación o por otra.

Algunas posibles respuestas dadas por el alumnado son las siguientes:

(a) Sean los números 3,34, 4,56, 3,59, etc.

Sería más adecuado escribir, por ejemplo, los números 3.34, 4.56, 3.59, etc. para distinguir las comas decimales de las comas ortográficas.

(b) Sean los números 3.345, 4.564, 3.593, etc.

Sería más adecuado escribir, por ejemplo, los números 3'345, 4'564, 3'593, etc. para distinguir las comas decimales de las comas ortográficas y los puntos decimales de los puntos que se utilizan en ocasiones para la separación de los miles.

Una vez que hemos hecho este paréntesis en la actividad con una cuestión realmente interesante, retomamos la tarea y...

VOLVEMOS A LA ACTIVIDAD 1. Vamos con el desarrollo de las respuestas.

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

x : "Número de kilogramos de patatas compradas"

y : "Número de kilogramos de manzanas compradas"

z : "Número de kilogramos de naranjas compradas"

La determinación de incógnitas, en este caso, ha resultado bastante sencilla. Es un objetivo que parece bien trabajado, así que proseguimos con la actividad.

PLANTEAMIENTO:

$$1x + 1.2y + 1.5z = 13.5704$$

$$x + y + z = 10$$

$$z - y = 3.148$$

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

El profesor tiene el papel de "guía" pero no de "solución". Será fundamentalmente un moderador que encauzará los posibles errores que se vayan cometiendo, con la colaboración de todos los participantes.

(a) En la primera ecuación, si bien la transcripción de esta ecuación resulta sencilla, son numerosos los alumnos que se replantean colocar tantos decimales como aparecen en el enunciado o poner solo dos, ya que se trata de euros (se debería de redondear a céntimos de euro). Son varios los que alertan sobre el enunciado, donde dice "debería de haber sido", pues si está así puesto, alguna razón habrá para que lo tengamos que poner con todas las cifras.

(b) La segunda ecuación no acarrea ningún problema de transcripción.

(c) La tercera, a pesar de ser una forma de enunciado habitual suele ser de las presentan más dificultades de traducción. Rápidamente las identifican con unas "ecuaciones tipo" en las que hemos trabajado en la que una cantidad es mayor o menor que otra en un cierto número de unidades. En este caso solemos buscar la mayor y al restarle la menor, colocaremos como diferencia esa cantidad que nos ofrece el enunciado. Con esa estrategia se ha conseguido que la práctica totalidad plantee bien este tipo de ecuaciones. Al equipo que no se había dado cuenta, no hubo que profundizar nada pues enseguida se dieron cuenta, achacándolo incluso a un despiste.

La mayoría proponen las 3 ecuaciones pero nadie formaliza el hecho y no se coloca el sistema de ecuaciones con su llave correspondiente.

$$\begin{cases} 1x + 1.2y + 1.5z = 13.5704 \\ x + y + z = 10 \\ z - y = 3.148 \end{cases}$$

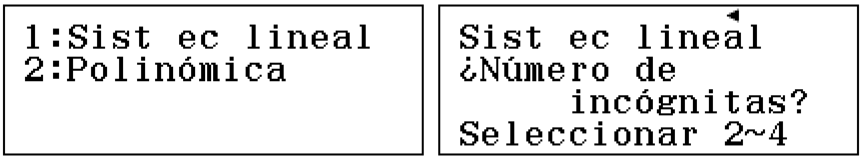
Algunos ya se han puesto a resolverlo antes de hacer esta puesta en común. Comentar que cuando se propone este tipo de tareas sin un trabajo previo en el aula, el alumnado tiene tan interiorizado el uso de los algoritmos que, sin excepción, lo hacen por métodos algebraicos, habitualmente el método de Gauss, sin tener en cuenta en ningún momento, que no se dice nada en contra de dar libertad a la hora de elegir dicho método. Solo cuando empiezan a ver que los cálculos son un tanto farragosos empiezan a mirar alrededor a ver si alguien lo hace con la calculadora, como herramienta auxiliar.

En nuestro caso, como en este tipo de actividades estamos habituados a hacerlo de esta forma, todos utilizan la calculadora.

17. La calculadora como herramienta habitual

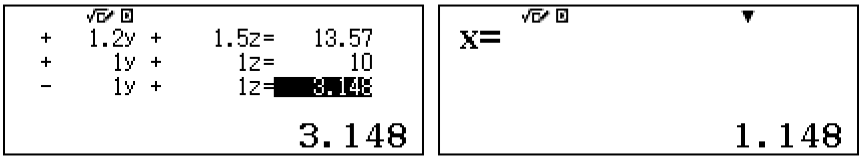
Con las ecuaciones correctamente presentadas prosigue el problema.

RESOLUCIÓN:

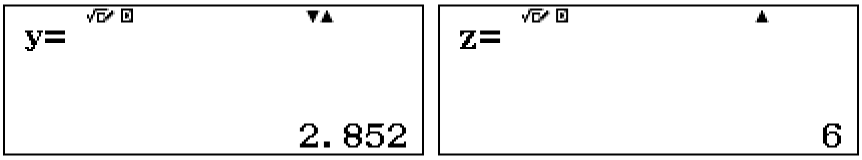


18 y 19. Pantallas de la calculadora

Normalmente, incluso la primera vez, no se explica la forma de resolverlo con la calculadora pues es tan intuitivo que el propio alumnado va interpretando qué teclas, aplicaciones, etc. tiene que ir tocando si es que tiene bien interiorizados los conceptos. Por ejemplo, en la pantalla 18 tiene que pensar si lo que está tratando de resolver es un sistema de ecuaciones lineales o una ecuación polinómica.



20 y 21. Pantallas de la calculadora



22 y 23. Pantallas de la calculadora con soluciones

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS:

Se insiste en una cuestión muy importante: "cuando acabamos de resolver un apartado, siempre debemos volver a leer el enunciado para ver si se ha contestado a lo que se pregunta", momento en el que muchos se dan cuenta de que AÚN no se ha interpretado reflexivamente el resultado.

Cada uno va proponiendo la solución.

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

Lo normal es que se dé el resultado en un tiempo verbal incorrecto ya que si el enunciado dice que es el alumno el que ha adquirido los productos en el mercado, la respuesta irá en primera persona. Aquí existe una disconformidad generalizada hacia la meticulosidad de las respuestas. Se les hace ver que debe existir un rigor y que las cosas pueden estar bien o intentar que estén mejor que bien.

Sorprendentemente hay algunos grupos que se decantan por la solución de "nunca se podrán dar estos resultados pues el número de kilogramos no pueden tener decimales" y otros dan las cantidades redondeadas con un solo decimal. Tras un debate acerca de cómo debemos responder definitivamente a la actividad, número de decimales a tomar, etc., hemos llegado al acuerdo de poner como respuesta:

"He adquirido 1.148, 2.852 y 6 kg, respectivamente, de patatas, manzanas y naranjas"

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Como actividad complementaria de matemáticas aplicadas a la vida cotidiana se propone acudir a una gran superficie (a lo largo de la semana) donde el precio del artículo lo obtiene el propio cliente pesando el producto y obteniendo automáticamente los euros a pagar. Cada grupo aportará una de estas pegatinas.

NOTA: A continuación mostramos una de las etiquetas aportadas por un grupo a posteriori, confirmando el tipo de respuesta dada el día de la prueba, con el peso con 3 decimales, el precio con 2 y el importe con otros 2 decimales. Para otra ocasión quedará el estudio matemático del código de barras.

24. Etiqueta de Mercadona

Actividad 2

Un cliente de una estación de servicio de gasolina debería de haber pagado un total de 116' 664 euros por 24 litros de gasolina normal, 6 litros de una gasolina especial y 12 litros de aceite de oliva. Si sabemos que la relación entre el precio de la gasolina normal y del aceite de oliva es 287/1500 y que el precio del aceite de oliva excede a la suma de los precios de ambas gasolinas en 2 euros, plantea un sistema de ecuaciones que nos permita saber el precio de cada artículo.

Si hoy le doy como propina al chico de la gasolinera el valor de un litro de gasolina normal, mañana le doy al otro chico el de la gasolina especial y pasado mañana, a la chica, el del aceite de oliva, ¿cuánto les habré dado cada día a cada uno?

25. Precios con 3 decimales

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

x : "Precio de un litro de gasolina normal, en euros"

y : "Precio de un litro de gasolina especial, en euros"

z : "Precio de un litro de aceite de oliva, en euros "

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

Observamos que en este momento es muy importante hacer un alto pues la determinación de incógnitas ha resultado más complicada de lo habitual de detectar. Es curioso que, a nivel cotidiano, muy pocos sabían que en las estaciones de servicio se trabaja con 3 decimales.

ACTIVIDAD INTERMEDIA SURGIDA. Si con dos decimales se habla de céntimos, ¿cómo se dirían esas unidades con 3 decimales? Parece que serían milésimos de euro.

Comentemos la determinación de incógnitas. Muchos hablan de calcular el número de litros de cada producto, pero a la hora de plantear se encuentran con problemas en las unidades resultantes y que las cosas no encajan. Otros calculan cantidades en euros, pero eso ya lo da el problema, con lo que se volverían a generan nuevos conflictos de unidades en el planteamiento. Una vez llegado a un acuerdo pues claramente el enunciado dice "plantea un sistema de ecuaciones que nos permita saber el precio de cada artículo", seguimos...

PLANTEAMIENTO:

$$24x + 6y + 12z = 116'\,664$$

$$\frac{x}{z} = \frac{287}{1500}$$

$$z - (x + y) = 2$$

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

(a) En cuanto se determinan correctamente las incógnitas, la primera ecuación ha sido sencilla.

(b) Esta ha sido la más complicada. La mayoría no sabe traducir el término "la relación entre" y algunos lo colocan incluso como un diferencia o una suma. Lo habitual es que, una vez que entramos en debate, haya alguien que llegue a la conclusión correcta, quizás por la pista de dar esa "relación" en forma de fracción.

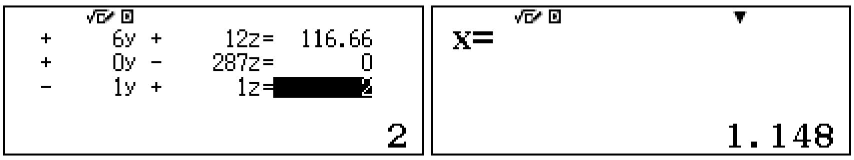
Tras algunos problemas para introducir esta expresión en la calculadora, el debate reconduce a la estrategia correcta, haciendo producto de medios por producto de extremos.

$$1500x - 287z = 0$$

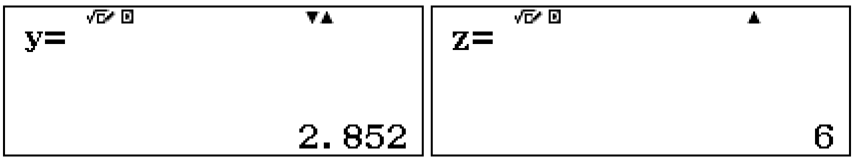
(c) Este tipo de ecuaciones, con la estrategia anteriormente comentada, demuestra que nuestros alumnos la tiene bastante bien interiorizada, aunque hay algún grupo que no la hace correctamente, pero la entienden sin problemas.

$$\begin{cases} 24x + 6y + 12z = 116'664 \\ 1500x - 287z = 0 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:



26 y 27. Pantallas de la calculadora



28 y 29. Pantallas de la calculadora

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS:

El alumnado escribe su propuesta de análisis de resultados y pasamos a analizarlas.

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

Algunos comentan el precio de los productos pero se insiste en leer detenidamente el enunciado. Se explica que el hecho de parcializar los resultados en 3 valores independientes radica en que no queremos que nos sumen las tres cantidades, los 3 precios, y se dan cuenta que si se trata de dar una propina solo podríamos dar el importe redondeando hasta los céntimos.

A muchos empieza a llamarles la atención que los resultados hayan sido extrañamente "idénticos" que en la primera actividad, a pesar de tener varios decimales, aunque ciertamente el resultado que tienen que justificar, en este caso, será con 2 cifras decimales, ya que a una persona tendremos que pagarle, exactamente, con euros y céntimos de euro, con lo que añadimos el concepto de redondeo. Finalmente se acepta como respuesta:

"Al primer chico le daremos 1.15 euros, al segundo 2.85 y a la chica una buena propina de 6 euros".

NOTA: Exponer que algunos comentan que qué pinta el aceite de oliva en este problema. Tras un breve debate se llega a la conclusión de que es para darle una dosis de realismo y ajustarlo al contexto. Queríamos un número entero y por ese precio la gasolina no "encajaba".

Actividad 3

A una excursión acuden niños, mujeres y hombres. Sabemos que se reúnen un total de 10 personas y también que el doble de hombres es igual al triple de la suma de mujeres y niños. Si al multiplicar por mil la diferencia entre hombres y mujeres obtenemos 3148, plantea un sistema para calcular cuántos hombres, mujeres y niños hay. Comenta y justifica los resultados.

30. Nos vamos de excursión

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

x : "Número de niños"

y : "Número de mujeres"

z : "Número de hombres "

PLANTEAMIENTO:

$$x + y + z = 10$$

$$2z = 3(x + y)$$

$$1000(z - y) = 3148$$

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

No ha sido necesaria una puesta en común en la determinación de incógnitas, pues no ha habido problemas. Es curioso que, llegado este momento, hay algunos equipos consideran innecesario plantear el problema pues empiezan a darse cuenta del título de la actividad "**Una misma solución puede no ser una misma solución**" y presuponen las soluciones.

Otros grupos hacen hincapié en la importancia de leer el enunciado y que, claramente, se expresa que hay que "plantear un sistema". Una vez vueltas las aguas a su cauce, pasamos analizar el planteamiento de los sistemas:

(a) La primera ecuación se plantea por la totalidad de la clase sin dificultades.

(b) Solo un grupo no ve necesario poner paréntesis pero no hay que alargar nada el debate pues se acepta de inmediato el error. Algunos no acaban de ver cómo introducir esta expresión en la calculadora, pero tampoco presenta conflictos de aceptación

$$3x + 3y - 2z = 0$$

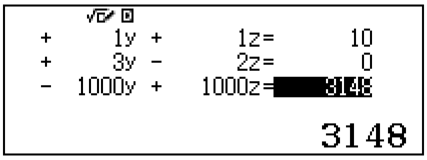
(c) Es curioso que varios equipos no ven necesario multiplicar por 1000.

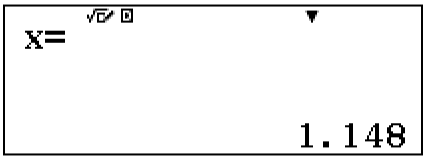
$$1000z - 1000y = 3148$$

A continuación, con los conceptos consolidados en el sistema anterior, la introducción de datos se convierte en sencilla:

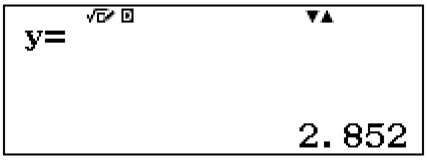
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \\ -1000\,y + 1000z = 3148 \end{cases}$$

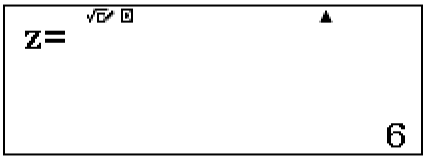
RESOLUCIÓN:





31 y 32. Pantallas de la calculadora





33 y 34. Pantallas de la calculadora

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS:

El alumnado escribe su propuesta de análisis de resultados en la hoja de trabajo y pasamos a analizarlas.

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

Dos grupos dan la solución en forma decimal pero sorprendentemente, a pesar de ser un tipo de actividades muy trabajadas en el aula, la práctica totalidad del alumnado opta por redondear los resultados y dan como solución 1, 3 y 6.

Después de la puesta en común, analizando el significado de los resultados se llega a la conclusión de que...

"Jamás se podrían dar simultáneamente los resultados del enunciado pues el número de personas tienen que ser números naturales"

35. Prueba conseguida

Actividad 4

Finalmente nos han encargado resolver un sistema para calcular el número de viajes que tenemos que realizar con tres tipos de camiones A, B y C. Después de las operaciones oportunas obtenemos que se necesitan hacer 6 viajes con el camión A pero cuando calculamos los de los camiones B y C obtenemos, respectivamente, 287/250 y 713/259. Por lo tanto, ¿cuántos viajes dirías que habrá que realizar con cada camión?

36. El camión como medio de transporte

Lo estimulante de esta nueva actividad es que en estos momentos, a pesar de que puede despistar el no tener que determinar incógnitas ni plantear ecuaciones ni resolverlo, la totalidad del alumnado se dispone directamente al...

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS:

Se presentan numerosos interrogantes. Es claro que con el camión A habrá que realizar 6 viajes pero con B y C la cosa no está tan clara. Quizás el hecho de haber hecho con anterioridad los 3 problemas anteriores hace que se transformen las expresiones fraccionarias a decimal sin muchas dudas.

Veamos las soluciones para entender mejor las interpretaciones de los diferentes equipos.

A = 6 ; B = 1.148 ; C = 2.852

Si colocamos las unidades correspondientes a los números:

A = 6 viajes ; B = 1.148 viajes ; C = 2.852 viajes

Tras 5 minutos de reflexión e intentar dar con la solución dedicamos unos

MINUTOS PARA UNA PUESTA EN COMÚN

ANÁLISIS 1

Un grupo da como solución 6 viajes con el camión A, 1.148 viajes con el camión B y 2.852 con el C. Este análisis será replicado de inmediato. La respuesta es rechazada pues no se puede dar esta solución con decimales.

ANÁLISIS 2

Otro grupo da como solución 6 viajes con el camión A, 1 viaje con el camión B y 2 con el C, pues no puede haber decimales en los viajes, a lo que el resto también replicará de inmediato, pues de esta forma no se lograría llevar toda la mercancía.

ANÁLISIS 3

Tres grupos manifiestan directamente que 6 viajes serían con el camión A, 2 viajes con el camión B y 3 viajes con el C, ya que al ser decimales B y C, necesitarían un viaje más para llevar sus cargas correspondientes. Este análisis es aceptado por la mayoría.

ANÁLISIS 4

Pero el análisis 3 es rebatido por otros grupos que se dan cuenta que los decimales suman la unidad, por lo que proponen que 6 viajes serían con el camión A, 1 viaje con el camión B, 2 con el C y el resto podrían llevarlo o bien el B o el C, con lo que habría dos posibles soluciones:

A = 6 viajes ; B = 2 viajes (1 + 1) ; C = 2 viajes

A = 6 viajes ; B = 1 viaje ; C = 3 viajes (2 + 1)

ANÁLISIS 5

Otro grupo rechaza esta opción, basándose en que en ningún momento se sabe el tamaño de los camiones y que para la necesidad de, por ejemplo:

B = 1.148 viajes ; C = 2.852 viajes

en el caso de que el camión B sea muy grande y el C muy pequeño, esa cantidad de 0.148 pendiente sería mucho mayor para el camión C o bien

B = 1.148 viajes ; C = 2.852 viajes

en el caso de que el camión B sea muy pequeño y el C muy grande, la cantidad de 0.852 pendiente podría ser una cantidad enorme para B y podría no ser capaz de llevarlo en un solo viaje.

Que ocurra alguna de estas cuestiones es lo más probable ya que el enunciado nos habla de 3 tipos de camiones, siendo lo más lógico discriminar el tamaño pues, en caso contrario, no nos especificarían que hay esos 3 tipos. El grupo admitiría un nuevo análisis, pero con un matriz:

ANÁLISIS 6

Siempre y cuando los camiones B y C sean exactamente iguales, habría dos posibles soluciones:

A = 6 viajes ; B = 2 viajes (1 + 1) ; C = 2 viajes

A = 6 viajes ; B = 1 viaje ; C = 3 viajes (2 + 1)

Como vemos, hay varias posibles soluciones y el desenlace al que se llega es que las más aceptadas serían los análisis 3 y 6, pero que lo más importante a la hora de contestar es que se dé una respuesta acompañada de las razones y matices en la que se sustenta.

Conclusiones

A través de esta actividad grupal se puede ver claramente que en el momento que los alumnos han sido los verdaderos protagonistas en la reflexión y en la toma de decisiones, mis objetivos al inicio del tema se han CIMENTADO Y CONSOLIDADO, con el análisis crítico de todo lo que se estaba haciendo en el aula, bien o equivocadamente, de manera que los propios alumnos llegasen a las conclusiones de forma consensuada: ha existido un continuo debate a lo largo de los problemas y la calculadora ha sido un elemento auxiliar que nos eliminado los cálculos farragosos que hubiesen supuesto un freno a la hora de realizar las reflexiones oportunas... y claramente, a través de los debates ha existido un enriquecimiento mutuo y se han cubierto con creces los objetivos propuestos, dándolos cuenta que realmente...

UNA MISMA SOLUCIÓN PUEDE NO SER UNA MISMA SOLUCIÓN

37. Con el objetivo fundamental de PENSAR

A partir de septiembre de 2015, seguiremos haciendo crecer esta semilla ampliando actividades y trabajando en el tema, intercambiando propuestas y presentando TAREAS –

FICHA que se podrán descargar en www.aulamatematica.com y www.classwiz.tk

En unas Jornadas como estas, las ya 17 JAEM, queremos mostrar nuestro recuerdo, nuestra admiración y nuestro homenaje a algunas personas que nos dejaron de forma excesivamente prematura, a los maravillosos matemáticos (y mejores personas) con los que compartimos entrañables momentos en anteriores ediciones, Bernardino del Campo, Mauricio Contreras y Manuel Pazos Crespo. ¡Va por vosotros!

38. Bernardino

39. Mauri

40. Coque