

Estrellas en la Sagrada Familia de Gaudí: Un contexto nuevo para estudiar poliedros.

María de los Desamparados López de Briñas Ferragut

email: mlope453@xtec.cat

Grup Vilatzara (ICE – UAB)

RESUMEN

Tradicionalmente se ha sostenido que apenas hay poliedros en la obra de Gaudí. Pero una ojeada a determinados lugares de la Fachada del Nacimiento de la Sagrada Familia permite entrever la existencia de diversos tipos de poliedros. En concreto, poliedros estrellados que representan estrellas con significados diversos. La variedad de poliedros utilizada sirve de marco para profundizar en algunas características de los mismos, al tiempo que proporciona un contexto nuevo con el que estudiarlos en el aula.

Palabras Clave: Sagrada Familia, Geometría, Arte, Poliedros, Astronomía.

Introducción

Tradicionalmente, un contexto para estudiar poliedros ha estado en objetos de la vida cotidiana, obras pictóricas (Durero, W. Jamnitzer, Leonardo da Vinci, S. Dalí,...) o escultóricas (pináculos de las torres de la Sagrada Familia,...), así como en el ámbito científico (estructura de la cubierta de algunos virus, estructura de minerales, cristalografía,...) o arquitectónico (forma de los edificios).

Sin embargo, una revisión de determinados lugares de la Fachada del Nacimiento de la Sagrada Familia de Barcelona permite entrever la existencia de más poliedros. En concreto, poliedros estrellados representando estrellas con significados diversos, que proporcionan un nuevo contexto que se puede trabajar en el aula.

LA ESTRELLA DE BELÉN

Está situada sobre una columna, justo en medio de la Fachada del Nacimiento, encima de la escena del Nacimiento y debajo de la escena de la Anunciación (figura 1).



Figura 1.- Detalle del Portal de la Caridad. La Estrella de Belén está en el centro de la imagen, arriba, justo encima de la columna que divide la imagen en dos.



Figura 2.- Vista frontal ampliada (izquierda). Las pirámides espirales se sitúan en el centro de cada cinco pirámides triangulares (derecha).

Una imagen ampliada (figura 2, izquierda) nos permite observar la simetría y la regularidad en la distribución de las puntas. Este detalle apunta hacia la posibilidad clara de una distribución basada en una estructura poliédrica. Por otra parte, observamos pirámides triangulares y pirámides en espiral. Las pirámides en espiral están situadas en el centro formado por cinco pirámides triangulares (figura 2, derecha y figura 3, izquierda).

Si agrupamos las puntas triangulares formando pentágonos por toda la estrella, obtenemos la imagen de la figura 3. Claramente, la distribución de puntas de la Estrella de Belén sigue la disposición de los vértices de un Dodecaedro. En los centros de las caras de dicho dodecaedro subyacente se sitúa una pirámide en espiral pentagonal.

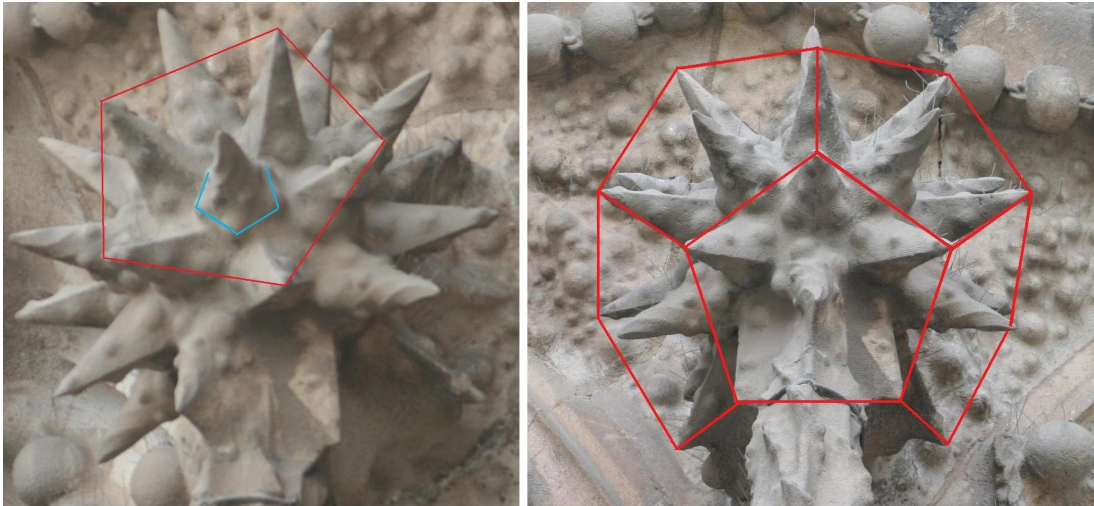


Figura 3.- Agrupamos las pirámides formando pentágonos con centro una pirámide en espiral (derecha). La repetición del proceso por toda la estrella conduce a la obtención de una estructura dodecaédrica subyacente.

Modelos Teóricos a partir del Dodecaedro

Para buscar un modelo teórico de poliedro que explique la mayoría de detalles de la estrella, nos basamos en la estructura dodecaédrica. Los poliedros asociados a éste son algunos arquimedianos, como el Icosidodecaedro, el Icosaedro Truncado, el Pequeño Rombicosidodecaedro o el Dodecaedro Truncado.

La comprobación para averiguar cuál es el modelo teórico posible implica que hay que obtener una imagen de dichos poliedros pero estrellados por completo. Dicha imagen se puede obtener gracias al Applet de la Universidad brasileña Federal Fluminense, la UFF, llamado "A Plethora of Polyhedra"¹.

De estos tres candidatos, el último es el que se descarta ya que las pirámides triangulares obtenidas son demasiado pequeñas comparadas con las otras y en la estrella de Belén tienen un tamaño bastante similar. Además, son decagonales y no pentagonales. El Icosaedro Truncado queda descartado porque la posición de las aristas de las pirámides hexagonales no coincide. El Pequeño Rombicosidodecaedro queda descartado por presentar caras cuadradas, ya que en la estrella no hay pirámides cuadrangulares y es poco probable que éstas caras del arquimedianos no se estrellasen y las demás sí. Queda el Icosidodecaedro, pero nuevamente la posición de las aristas de las pirámides triangulares no coincide con la de las pirámides de la Estrella de Belén. Por tanto, todos estos candidatos quedan descartados (figura 4).

Los del grupo de Poliedros de Johnson (aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares pero no son platónicos, ni arquimedianos, ni prismas ni antiprismas) también quedan descartados ya que no presentan la regularidad, ni la simetría ni la esfericidad en la distribución de sus caras como la de la estrella. Los que presentan esfericidad contienen

caras cuadradas o caras triangulares contiguas, dos detalles que no aparecen en la estrella de Belén.

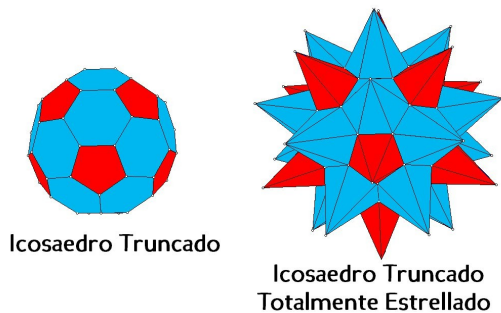
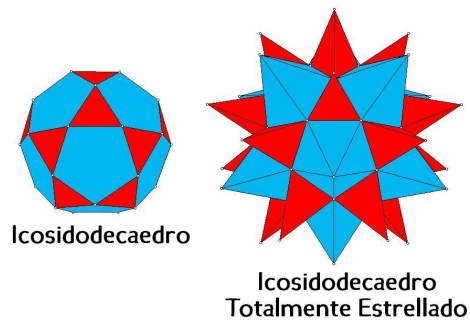


Figura 4.- Comparación del Icosaedro Truncado y del Icosidodecaedro estrellados con la Estrella de Belén. En ambos casos, todos los detalles de número, distribución y orientación de las pirámides no quedan explicados, por lo que estos modelos teóricos no son válidos.

Modelo Teórico Final

Una vez descartados todos estos candidatos, todavía queda una posibilidad que pueda aportar un modelo teórico válido para explicar la mayoría de los detalles de la estrella de Belén, y es la composición de dos poliedros. De igual modo que la Stella Octangula se puede ver como un octaedro estrellado o como una intersección de dos tetraedros, existe una posibilidad para explicar la Estrella de Belén por un procedimiento similar.

¿Qué poliedros se pueden componer para explicarla?

La agrupación en grupos de cinco pirámides triangulares y la estructura dodecaédrica subyacente son características de uno de los poliedros de Kepler- Poincaré. En concreto, del Gran Dodecaedro Estrellado de Kepler. Se puede entender como un icosaedro estrellado o como una intersección de doce pentagramas (estrellas de cinco puntas) sobre las doce secciones pentagonales que se pueden realizar en un icosaedro. Los triángulos de las pirámides son áureos.

Una comparación con la Estrella de Belén (figura 5) permite comprobar la coincidencia del número, distribución y orientación de las pirámides triangulares del modelo teórico con las de la estrella. Por tanto, sería uno de los poliedros que la componen.

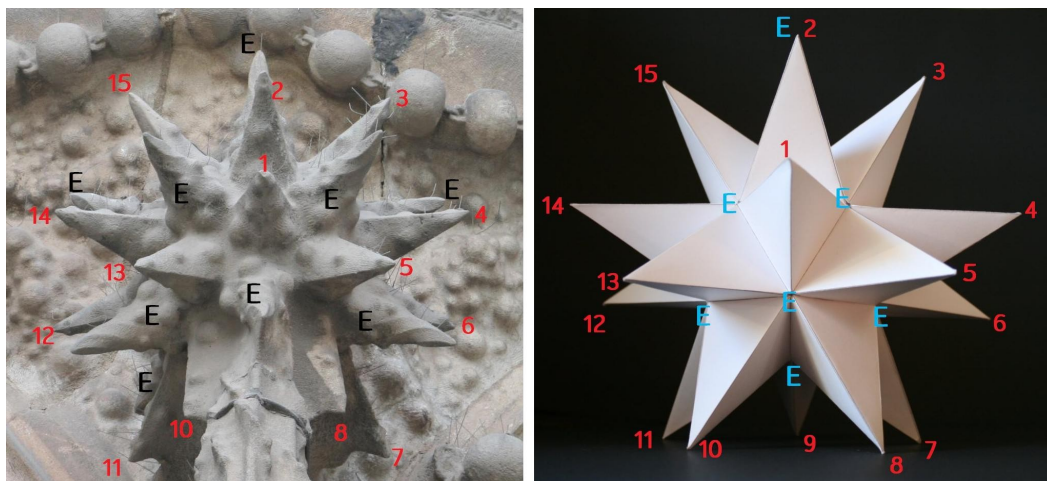


Figura 5.- Comparación de la Estrella de Belén con el modelo de Gran Dodecaedro Estrellado de Kepler propuesto.

En la figura 5 podemos observar las letras E, correspondientes a Espiral. Dado que las 20 puntas del modelo teórico están agrupadas de manera que sus vértices están situados sobre los vértices de un dodecaedro y que en cada centro de cinco pirámides triangulares se sitúa una pirámide pentagonal espiral, dichas pirámides espirales están distribuidas sobre las caras de un dodecaedro. Por tanto, serían las puntas de un dodecaedro estrellado de pirámides pentagonales espirales. Y éste sería el otro poliedro que forma la Estrella de Belén.



Figura 6.-. Infografía: Jaume Serra Nogués².

En la figura 6 podemos ver una imagen de este modelo teórico propuesto, resultado de componer dos poliedros estrellados. En amarillo, el Gran Dodecaedro Estrellado de Kepler. En rojo, un dodecaedro estrellado. Las pirámides en espiral serían un ornamento añadido.

LOS PINÁCULOS DE LOS BALCONES DE LAS TORRES DE LA FACHADA DEL NACIMIENTO

En cada uno de los balcones de las torres de la Fachada del Nacimiento hay un pináculo que constituye el remate decorativo superior de la estatua del apóstol al que va dedicada cada torre. Dicho pináculo está formado por estrellas representando un cielo estrellado sobre el apóstol. Aparecen cinco tipos diferentes y para cada una de ellas hay un modelo teórico de poliedro estrellado que explica los detalles que presentan (figura 7).



Figura 7.

Modelos Teóricos Propuestos

La primera estrella presenta once puntas visibles, que son pirámides pentagonales estilizadas y con puntas y aristas suavizadas. Cinco de ellas están dispuestas alrededor de una que se dirige hacia el espectador, y hay otras cinco que aparecen por detrás, justo entre cada una de las cinco en primer plano. La disposición y número de las mismas se corresponde con la de un dodecaedro estrellado (figura 8).

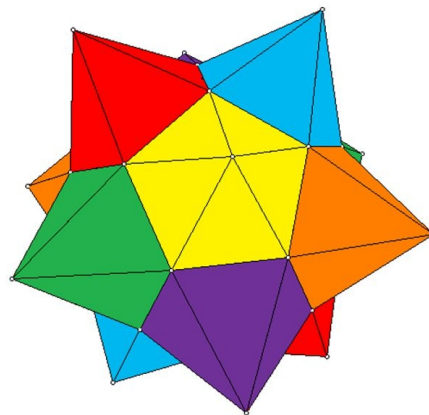


Figura 8.- Estrella y modelo teórico propuesto.

Una segunda estrella sería la de la figura 9. Dado que las puntas de la estrella son pirámides cuadradas, que vemos cinco y están dispuestas de forma ortogonal unas a otras, el modelo teórico propuesto es el de un cubo estrellado por agregación de pirámides.

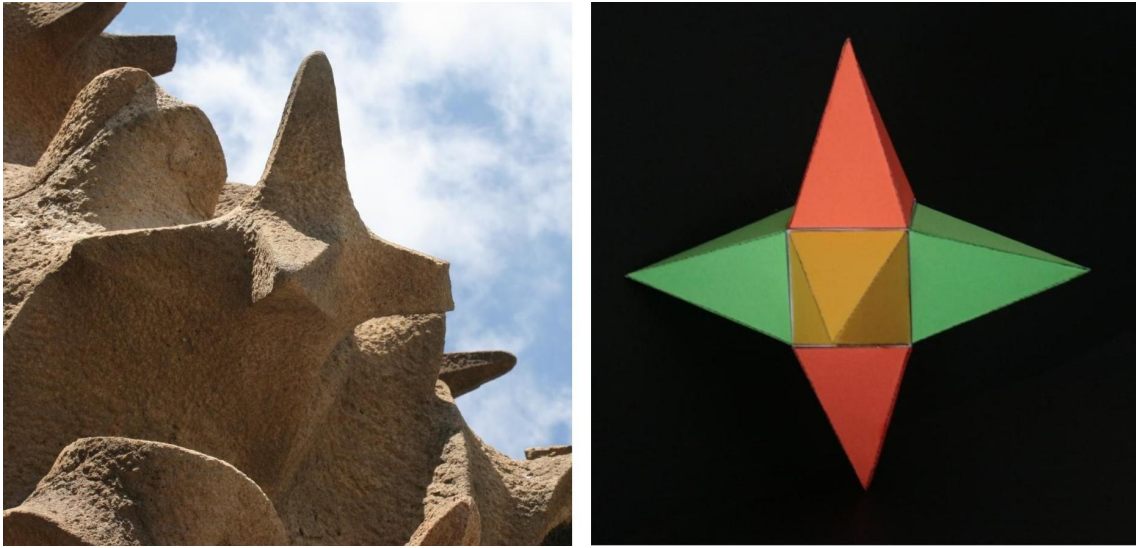


Figura 9.- Estrella y modelo teórico propuesto.

Para los otros tres tipos de estrellas (figuras 10, 11 y 12), sólo aparecen pirámides hexagonales en un número y disposición que coincide con los de los siguientes modelos propuestos de poliedros arquimedianos parcialmente estrellados:



Figura 10.- Icosaedro Truncado estrellado por las caras hexagonales.

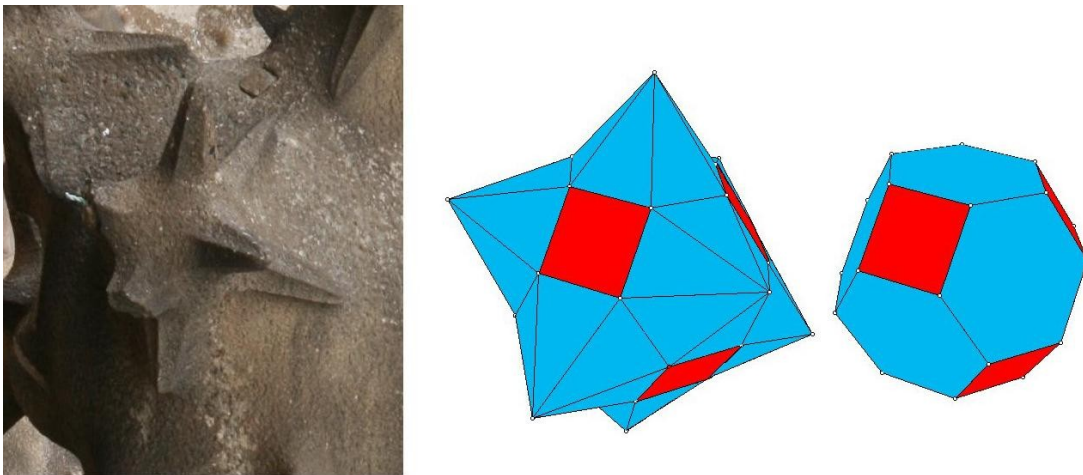


Figura 11.- Octaedro Truncado estrellado por las caras hexagonales.

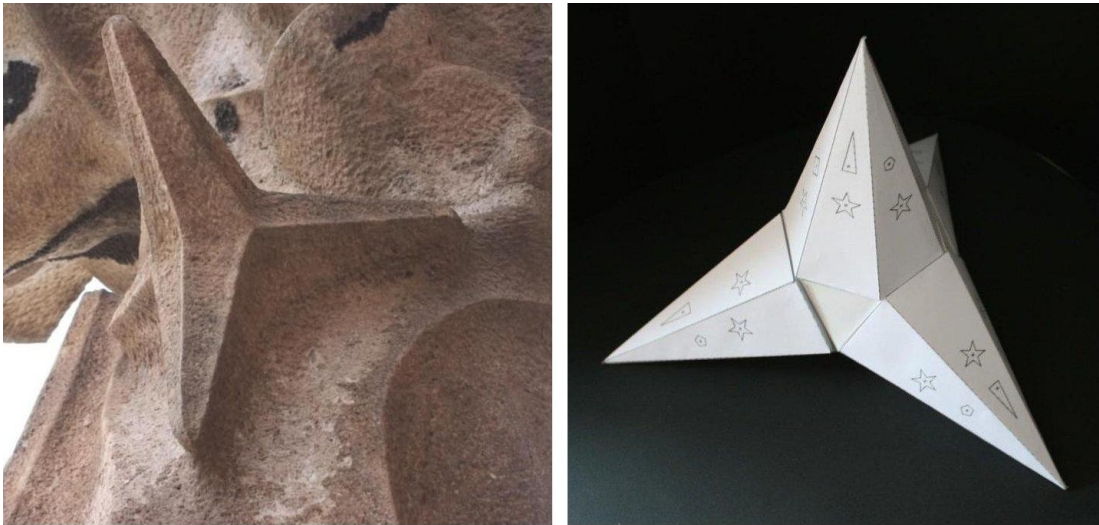


Figura 12.- Tetraedro Truncado estrellado por las caras hexagonales.

Sin embargo, un análisis más detallado nos lleva a concluir que estos tres modelos últimos no son correctos, ya que el número, tipo y distribución de pirámides coincide, pero no la orientación de las mismas. En la figura 12 se ve claramente que las aristas de las pirámides hexagonales contiguas tienen dos y tres lados en común, algo que es imposible a menos que las pirámides estén paralelas unas a otras o en el mismo plano, pero no es el caso. Y por otro lado, observamos que tres aristas convergen en un único punto, un detalle que en el modelo teórico de la derecha, también en la figura 12, no se cumple.

Lo mismo podemos observar en las imágenes de las figuras 10 y 11. Las pirámides aparecen giradas 30° respecto a las del poliedro propuesto.

Es posible encontrar un modelo que explique este detalle y, al mismo tiempo, mantenga los anteriores referentes a la similitud con algunos arquimedianos.

El proceso seguido para generar estas tres estrellas sería el siguiente:

- Partimos de un poliedro platónico (tetraedro, octaedro o icosaedro) que convertimos en arquimediano mediante un truncamiento por los puntos medios.
- A continuación volvemos a truncar el arquimediano, de nuevo por los puntos medios de todas sus aristas, generando nuevas caras triangulares que no son equiláteras.
- Por último, estrella el poliedro obtenido por agregación de pirámides, pero sólo por las caras hexagonales.

En la figura 13 queda ilustrado este proceso para la estrella icosaédrica:

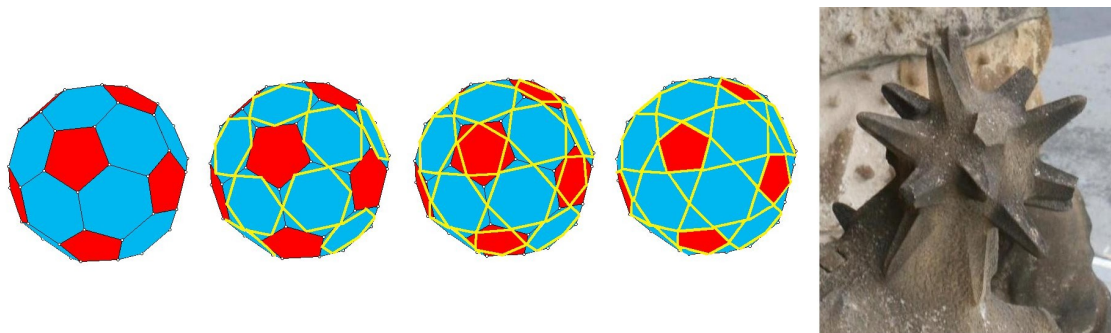


Figura 13.

Número y Distribución de Estrellas en cada pináculo

Un detalle más a añadir es que los pináculos de todas las torres no son iguales. Hay de dos tipos y están distribuidos de manera asimétrica en la fachada. Además, la diferencia entre uno y otro radica tanto en el número de estrellas (en uno hay una más) como en la distribución de las mismas, tal y como se puede apreciar en las figuras 7 y 13.



Figura 14.

En la figura 14, a la izquierda, tenemos el pináculo de las torres de San Simón y San Matías. El de la derecha corresponde a las torres de San Bernabé y San Judas Tadeo. En ambos hay dos cubos estrellados, dos dodecaedros estrellados, un único icosaedro truncado estrellado, dos octaedros truncados estrellados y dos tetraedros truncados estrellados (estos tres modelos últimos, estrellados de la forma que se ha explicado anteriormente). Sin embargo, en el pináculo de las torres de San Simón y San Matías tiene un tetraedro truncado estrellado de más, situado en la parte frontal.

Es decir, Gaudí se basa en los cinco platónicos y en truncamientos de algunos de ellos para construir cinco tipos de estrellas diferentes, por agregación de pirámides.

LAS ESTRELLAS DE LAS CONSTELACIONES EN LA ESCENA DE LA ANUNCIACIÓN

El tercer lugar de la Fachada del Nacimiento en el que hay estrellas está situado justo encima de la Estrella de Belén. Se trata del Arco de las Constelaciones que enmarca la escena de la Anunciación, en la que el Arcángel Gabriel le comunica a la Virgen que será la madre de Jesús.

En el arco se representan seis de las constelaciones zodiacales presentes en el cielo nocturno en el momento del nacimiento de Jesús, y son: Virgo, Leo, Cáncer, Géminis, Tauro y Aries.



Figura 15.

En cada una de ellas se representan distintos tipos de estrellas. Están menos definidas que las estudiadas en los dos lugares anteriores, ya que hay pocas aristas y caras claramente identificables, pero el número y la distribución de las puntas que presentan hace posible asignar a cada una de ellas un poliedro concreto.

Modelos Teóricos Propuestos

Los cinco poliedros con los que se corresponden dichas estrellas son poliedros estrellados obtenidos directamente a partir de los cinco platónicos. En las figuras 16 a 20 mostramos cada una de las estrellas junto con el modelo teórico en la misma posición. De entre los cinco modelos presentados hay cuatro, del 16 al 19, cuyas pirámides tienen triángulos áureos en sus caras triangulares. Sin embargo, en el 20, el modelo elegido no es el Gran Dodecaedro Estrellado de Kepler (un icosaedro estrellado cuyas pirámides también tienen caras triangulares áureas) sino otra de las 59 formas posibles de conseguir un icosaedro estrellado, y que presenta mayor similitud con la forma que observamos esculpida en el Arco.

Los estrellamientos 16 a 18 se consiguen por agregación de pirámides al poliedro platónico original. El modelo 19 es el del Pequeño Dodecaedro Estrellado de Kepler y se consigue alargando las aristas del dodecaedro hasta que se cortan, o por intersección de doce pentagramas o estrellas de cinco puntas. El modelo 20 se consigue extendiendo los planos que contienen las caras del icosaedro hasta que se intersecan.

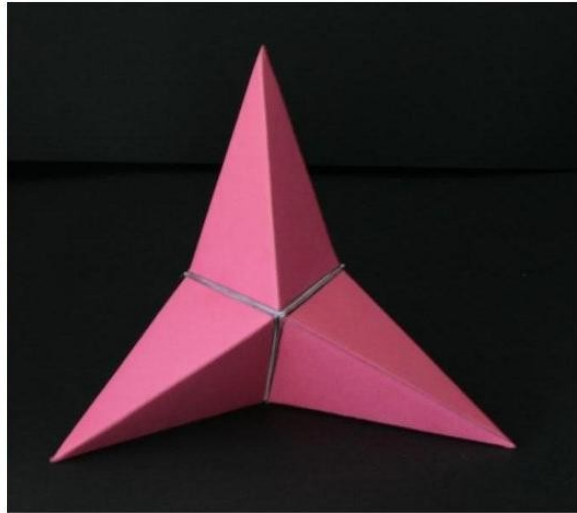


Figura 16.- Estrella Tetraédrica³ y modelo teórico propuesto.

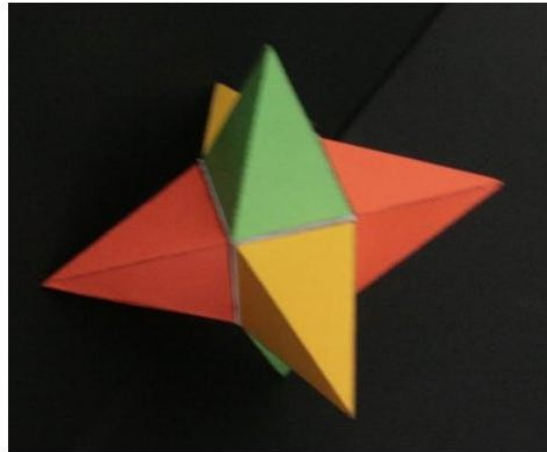


Figura 17.- Estrella Cúbica⁴ y modelo teórico propuesto.

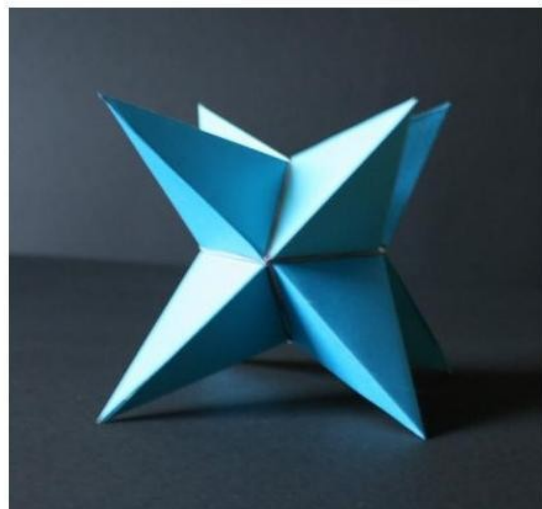


Figura 18.- Estrella y modelo teórico del octaedro estrellado.

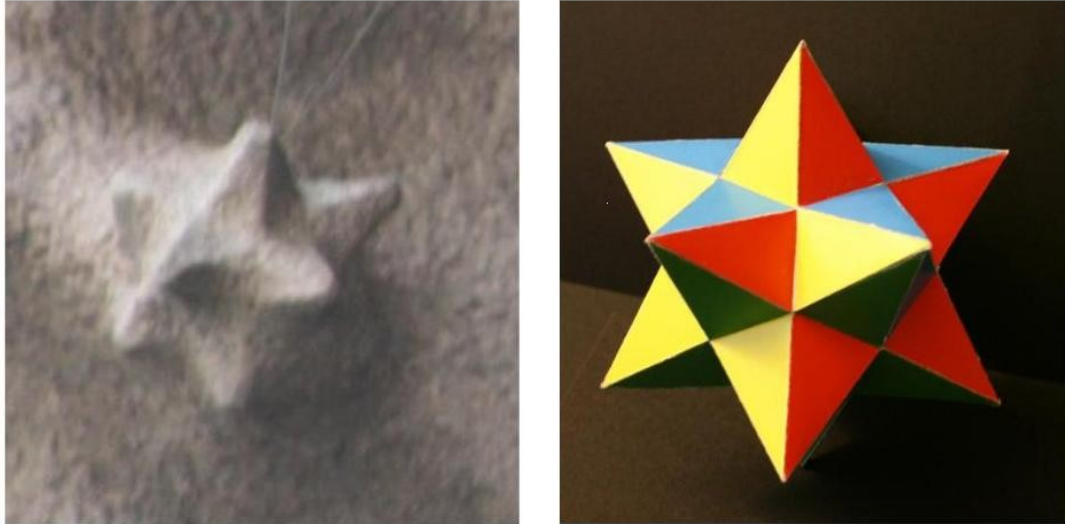


Figura 19.- Estrella y modelo teórico del dodecaedro estrellado.



Figura 20.- Estrella⁵ y modelo teórico del icosaedro estrellado.

Relación entre los poliedros y las estrellas

La utilización de cinco poliedros diferentes para representar estrellas tiene, en este caso de las constelaciones, un significado adicional.

Si en cada estrella de las constelaciones representadas situamos una inicial indicando el poliedro platónico correspondiente al estrellado (T, Tetraedro; C, Cubo; O, Octaedro; D, dodecaedro; I, Icosaedro) y comparamos la distribución de las estrellas en la escultura con las de un mapa estelar actual (en este caso tomamos como referencia los de la Unión Astronómica Internacional), encontramos una gran similitud entre unas y otras, siendo posible reproducir la misma estructura de líneas trazadas en los mapas estelares (que se usan para reconocer la constelación en el cielo real) en la escultura, como podemos ver en las figuras 21 a 27.

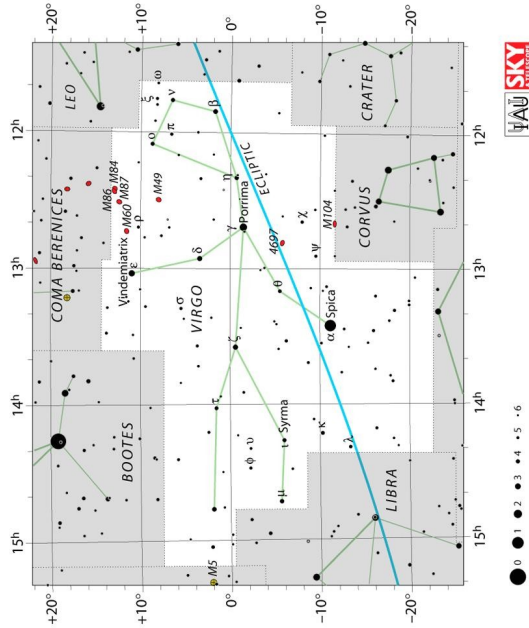
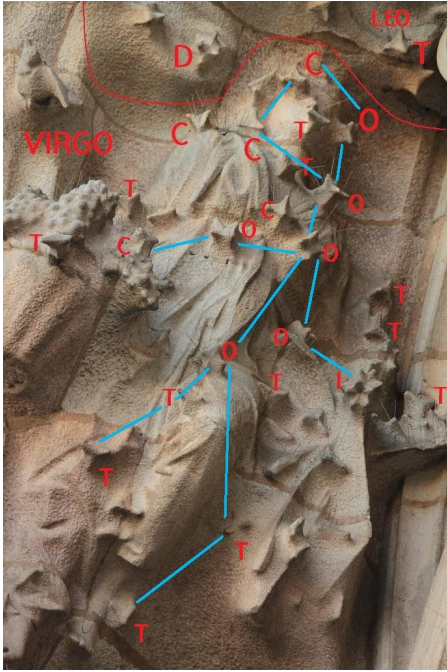


Figura 21.- Comparación de la constelación de Virgo⁶.

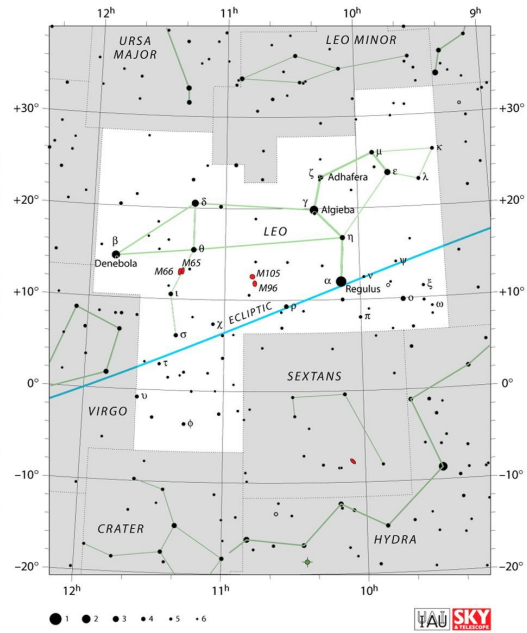
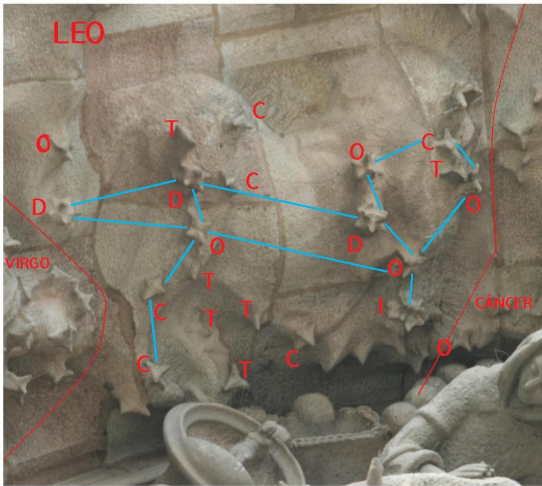


Figura 22.- Comparación de la constelación de Leo.

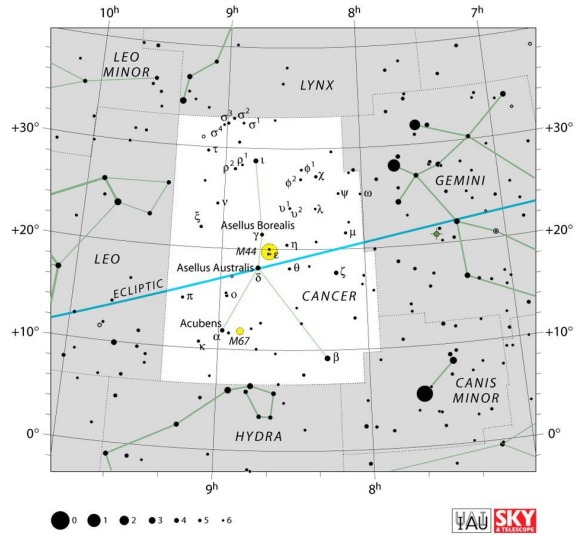
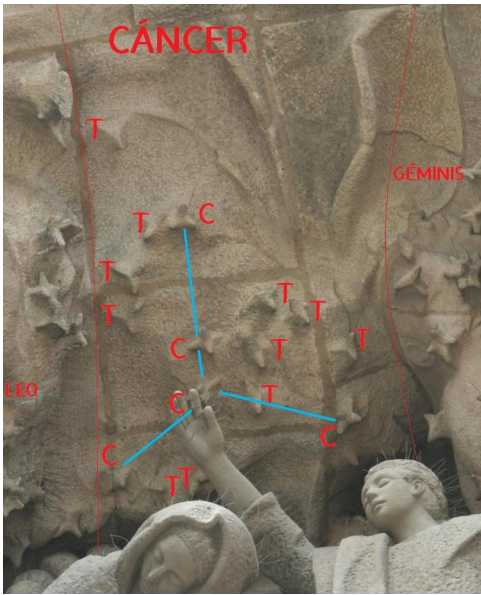


Figura 23.- Comparación de la constelación de Cáncer.

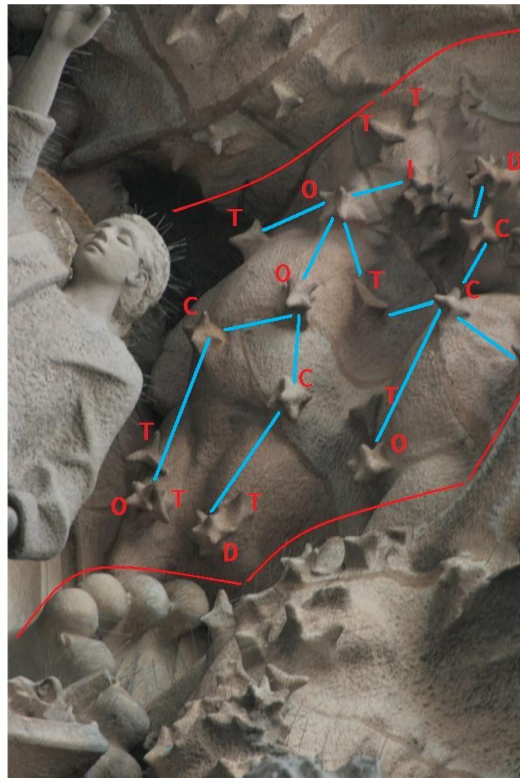
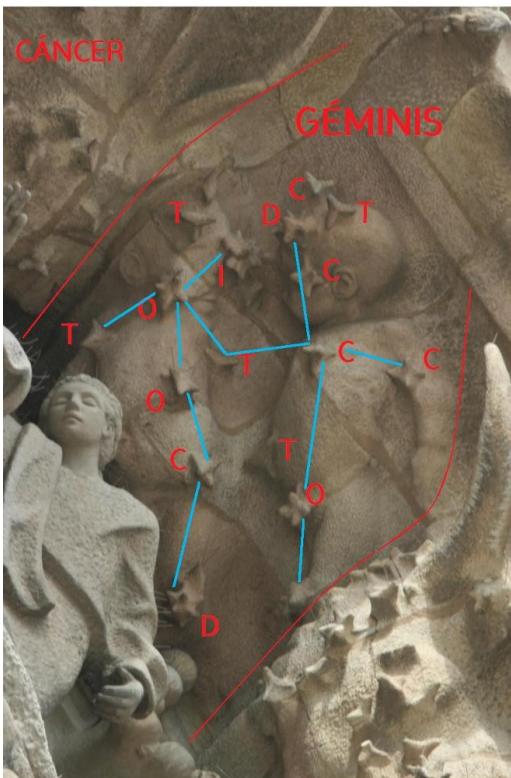


Figura 24.- Comparación de la constelación de Géminis⁷.

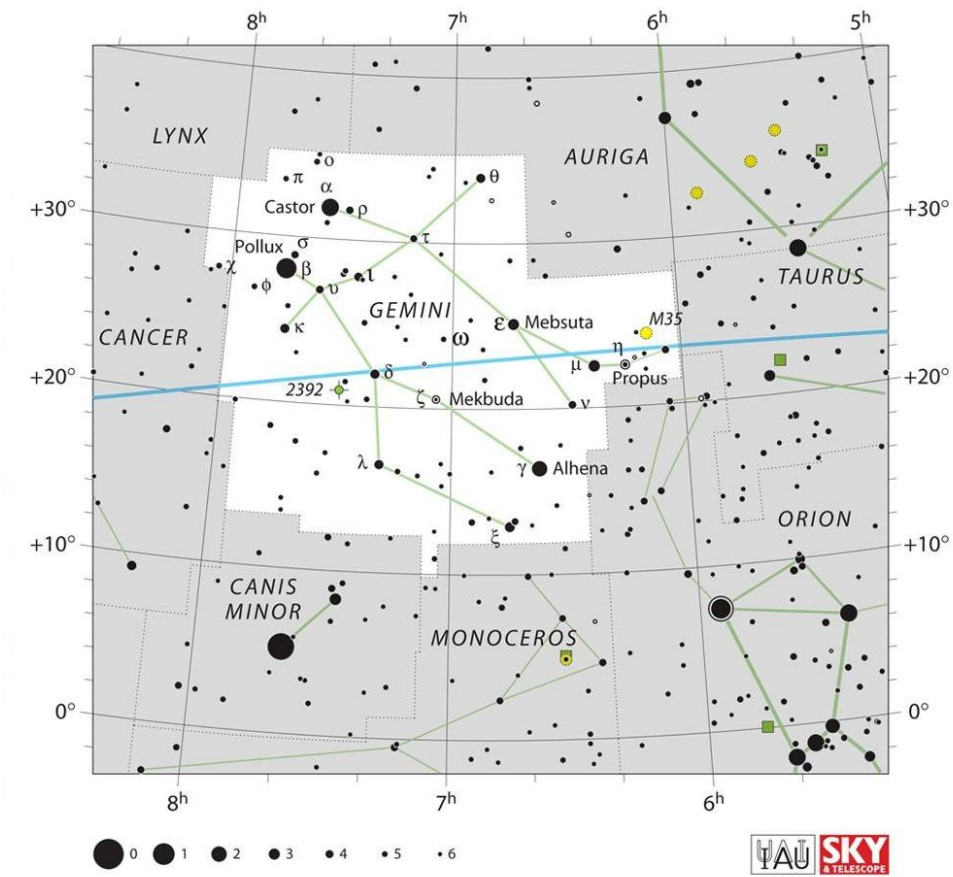


Figura 25.- Mapa estelar actual de la constelación de Géminis.

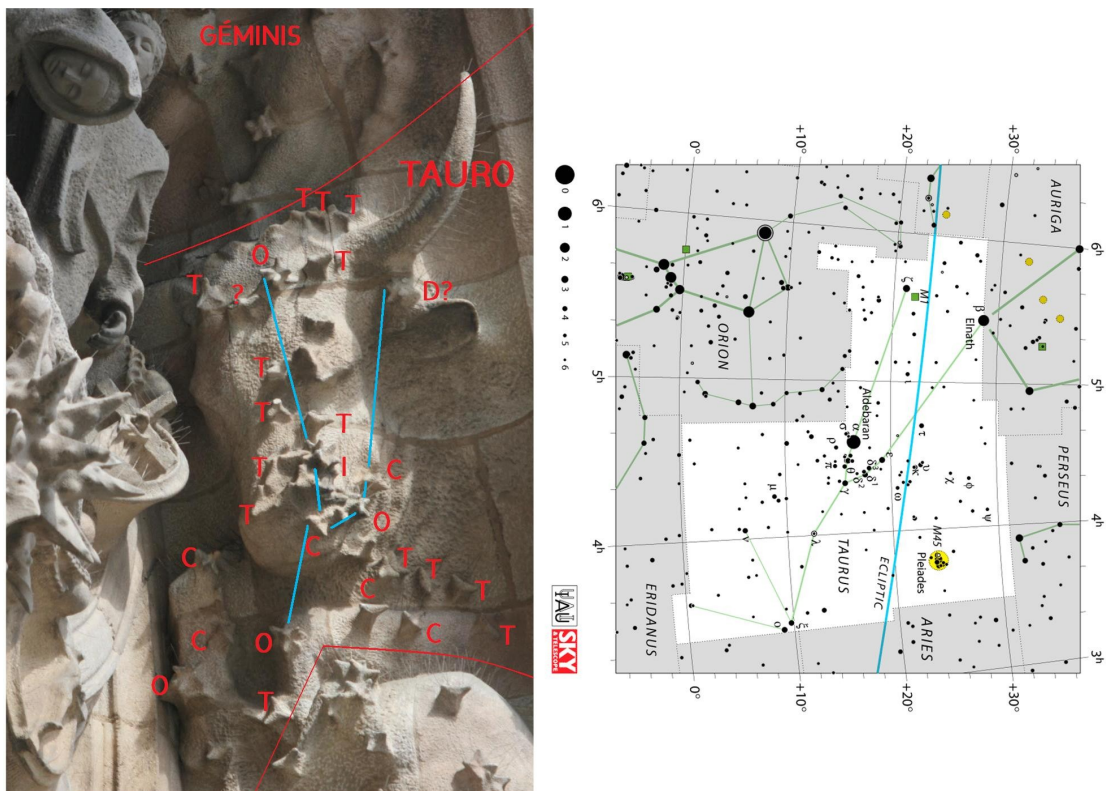


Figura 26.- Comparación de la constelación de Tauro.

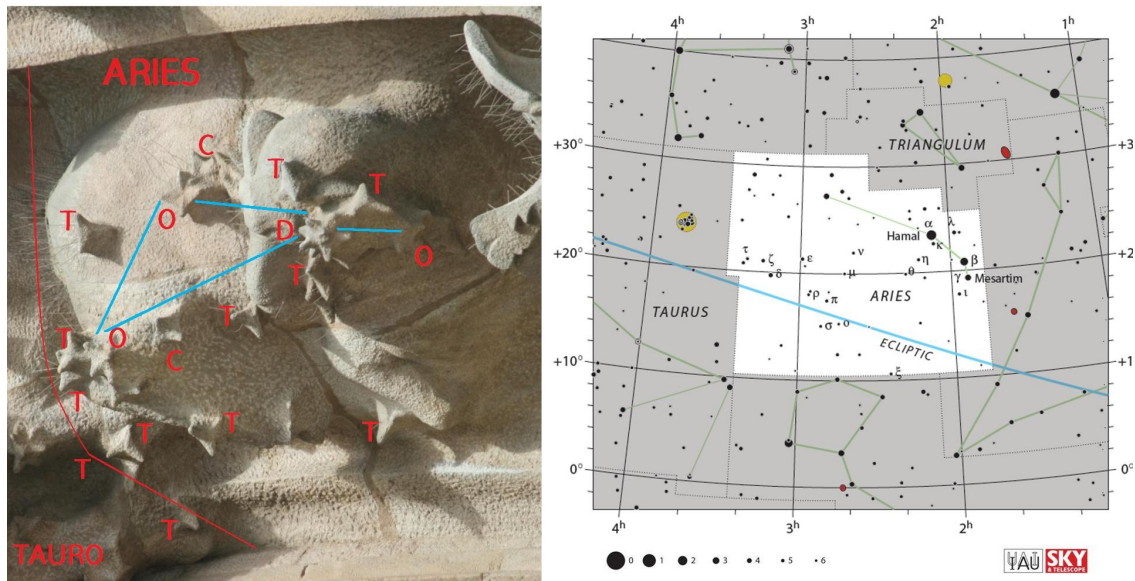


Figura 27.- Comparación de la constelación de Aries.

Dicha similitud permite establecer una relación directa entre el brillo de la estrella (o magnitud aparente) y el tipo de poliedro estrellado utilizado para su representación en el arco de las constelaciones.

Un análisis de los valores de magnitudes visuales de las 49 estrellas identificables en los mapas (del total de 136 representadas en las seis constelaciones, incluyendo aquellas más desdibujadas que se prestan a clasificación errónea), nos lleva a establecer la siguiente asignación magnitud- poliedro estrellado:

Magnitud Visual	Poliedro Estrellado
0.98 - 1.35	Icosaedro (20p)
1.93 – 2.61	Dodecaedro (12p)
2.64 – 4.35	Octaedro (8p)
3.52 – 4.50	Cubo (6p)
3.57 – 5.35	Tetraedro (4p)

Figura 28.- Fuente: Datos de magnitud visual del Programa Cartes du Ciel.

Esta correspondencia nos permite afirmar que Gaudí utilizó los cinco poliedros platónicos estrellados para crear una escala de brillo basada en el número de puntas de cada uno, de manera que la más brillante (menor magnitud visual) estaría representada por un icosaedro estrellado. Para la siguiente menos brillante se utilizaría un dodecaedro estrellado... y así hasta la menos brillante, representada por un tetraedro estrellado.

Dichas diferencias de brillo ya se representaban en los mapas estelares antiguos, mediante dibujos distintos para cada tipo de estrella. Sin embargo, en la Sagrada Familia, este procedimiento se realiza utilizando figuras en tres dimensiones, como son los poliedros estrellados.

APLICACIONES DIDÁCTICAS

Para cada estrella de las estudiadas hemos podido encontrar un modelo teórico que las explique.

La variedad de poliedros estrellados utilizada y el contexto sirven de marco para estudiar aspectos de dos disciplinas como son la geometría y la astronomía, así como para entender la visión personal de Gaudí sobre el nacimiento de Jesús.

Algunos de los aspectos en los que podemos profundizar son:

- Conocer formas de construir un poliedro/sólido estrellado a partir de un poliedro cualquiera:
 - por extensión de los planos que contienen las caras, o de las aristas
 - por agregación de pirámides
 - por intersección de polígonos
 - por composición de varios poliedros.
- Conocer posibles estrellamientos de los poliedros platónicos.
- Identificar diferentes tipos de poliedros estrellados mediante:
 - la utilización de diversas vistas
 - el recuento de elementos característicos como caras de las pirámides, aristas y vértices.
 - la representación de elementos geométricos superpuestos en fotografías digitales
- Conocer cómo se generan dos de los poliedros de Kepler-Poinsot: el gran dodecaedro estrellado de Kepler y el pequeño dodecaedro estrellado de Kepler.
- Reconocer cuándo un truncamiento de un poliedro genera un poliedro arquimediano y cuándo no.
- Conocer el concepto de brillo o magnitud aparente de una estrella.
- Conocer la representación de 6 constelaciones zodiacales, tanto la artística clásica como la utilizada en los manuales de astronomía actuales, así como la diseñada por Gaudí.
- Utilizar el concepto de dualidad de los poliedros para identificar los poliedros platónicos estrellados en las constelaciones.

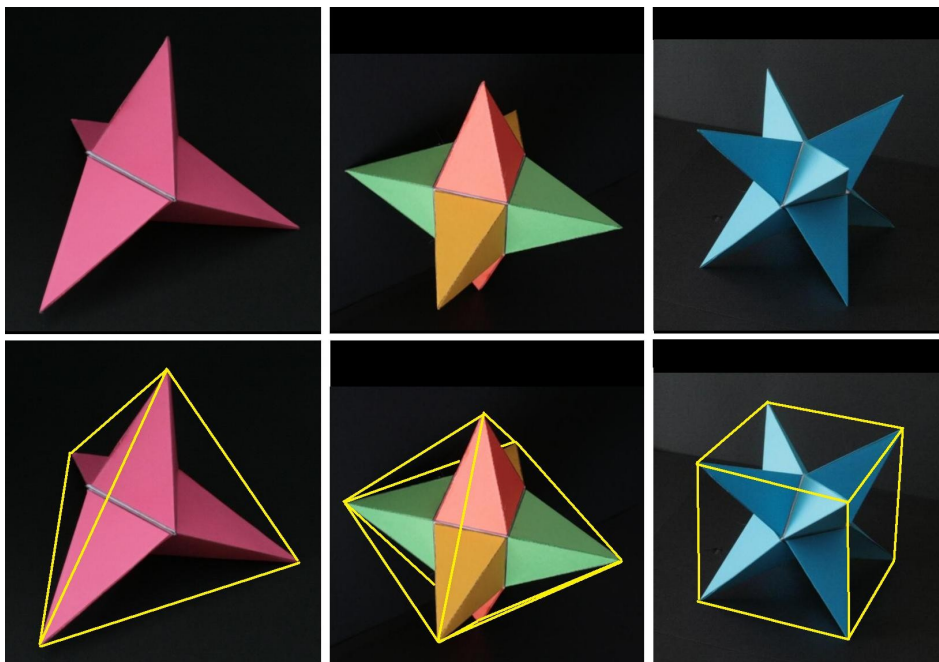


Figura 29.- Los duales de los sólidos estrellados del tetraedro, cubo y octaedro.

Notas

- 1.- Web del Applet "A Plethora of Polyhedra". Universidade Federade Fluminense, Brasil.
<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-en.html>
 - 2.- Jaume Serra Nogués es profesor de Matemáticas en el Institut Vilatzara, en Vilassar de Mar (Barcelona).
 - 3.- La fotografía de la estrella pertenece a una fotografía de Alexander Menzinsky.
 - 4.- La fotografía de la estrella pertenece a una fotografía de Alexander Menzinsky.
 - 5.- La fotografía de la estrella pertenece a una fotografía de Alexander Menzinsky.
 - 6.- La fotografía de la constelación de Virgo es de Alexander Menzinsky.
 - 7.- La fotografía izquierda de la constelación de Géminis es de Alexander Menzinsky.
- Todas las fotografías, a excepción de las mencionadas en las notas 3 a 7, son de la autora.
 - Todas las infografías de poliedros, a excepción de la que aparece en la figura 6, están obtenidas mediante A Plethora of Polyhedra.