Modelización matemática en la educación matemática realista: Una propuesta para contribuir a la construcción formal de álgebra lineal

Andrea Cárcamo Bahamonde; Joan Gómez i Urgellés; Josep Fortuny Aymemí

email: andrea.carcamo@uach.cl; joang@ma4.upc.edu; josepmaria.fortuny@uab.cat

Universidad Austral de Chile, Universidad Politécnica de Catalunya, Universidad Autónoma de Barcelona

RESUMEN

La experiencia que se presenta muestra los resultados del primer ciclo de aplicación de una secuencia didáctica elaborada siguiendo los fundamentos de la modelización matemática y la educación matemática realista con el propósito de contribuir a la construcción formal de contenidos de álgebra lineal, específicamente, conjunto generador y espacio generado. El estudio da evidencias que los estudiantes de ingeniería logran progresar en su conocimiento matemático formal de los conceptos estudiados al iniciar su construcción con un problema real seguido de tareas que les demandan distintos estados de comprensión que los conducen de su conocimiento matemático informal a uno más formal.

Modelización matemática, educación matemática realista, conjunto generador, espacio generado

1. Problema de Investigación

Álgebra lineal se encuentra entre las primeras asignaturas del ámbito matemático que tiene un estudiante de ingeniería y es considerada una de las fundamentales, ya que por una parte cumple un rol esencial para el desarrollo posterior de otras asignaturas, debido a su naturaleza tanto unificadora como generalizadora [5], pero además por otro, es una herramienta poderosa para resolver problemas de distintas áreas [3].

Sin embargo, a pesar de su relevancia, la enseñanza del álgebra lineal a nivel universitario es casi universalmente considerada como una experiencia frustrante tanto para profesores como estudiantes [12] e independiente de cómo se enseñe, es una asignatura difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente. En lo que se refiere a las causas de las dificultades para los estudiantes se distinguen dos: la naturaleza del álgebra lineal (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para su comprensión (dificultades cognitivas) [6].

Con la finalidad de buscar alternativas para la enseñanza del álgebra lineal, se han diseñado y realizado experiencias, entre ellas, la realización de variaciones a las clases magistrales, ya sea incorporando el uso de tecnología, el trabajo en grupo o creando un ambiente colaborativo donde el profesor tras haber explicado un tema nuevo, debate con los estudiantes [4]. Por su parte, Gómez y Fortuny [10] dan a conocer el proceso de modelización matemática como una herramienta innovadora en la enseñanza de álgebra lineal, señalando que es una metodología eficaz y además, una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos a la vez que establece la hermandad entre matemática y realidad.

Precisamente, en lo que se refiere a las aplicaciones y la modelización, Kaiser [13] expone que en las últimas décadas, tanto el aprendizaje como la enseñanza de éstas se han convertido en temas importantes, no sólo en la escuela sino que también en la universidad, debido a la creciente demanda en el mundo por el uso de la matemática en: la ciencia, la tecnología y la vida diaria. Sin embargo, son diversas las dificultades que se pueden presentar al introducir la modelación en las clases de matemática, entre ellas fundamentalmente: la complejidad que exige la producción de un modelo [21] y el tiempo de convivencia tanto de los docentes como de los estudiantes con la enseñanza tradicional [1], lo que conlleva a que exista una fuerte resistencia a la implementación de una nueva metodología.

Frente a estas dificultades emerge una respuesta plausible que se refiere a la consideración de los contextos tal como se utilizan dentro de la educación matemática realista (EMR), es decir, que promuevan el proceso de modelación matemática en las clases a la vez que se creen puentes para pasearse entre lo concreto y lo abstracto, facilitando de esta manera, diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos [22].

A partir de lo expuesto, surge el interés de diseñar y aplicar una secuencia didáctica que incluya la modelización matemática conectada con la EMR en álgebra lineal. En particular, para esta experiencia de enseñanza, se consideran los conceptos de conjunto generador y espacio generado, ya que es relevante su comprensión porque forman parte de espacios vectoriales los que según señalan Kolman y Hill [15] se utilizan en muchas aplicaciones de matemáticas, ciencias e ingeniería. Considerando lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta una secuencia didáctica que incorpore modelización matemática al progreso de la construcción formal de conjunto generador y espacio generado? Para responder a la pregunta se plantea como objetivo diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica basada en el uso de la modelización matemática en la EMR que promueva la construcción formal de conjunto generador y espacio generado.

2. Marco teórico

2.1. La educación matemática realista (EMR)

La EMR fue determinada mayormente por las ideas de Freudenthal [7] acerca de la matemática, su aprendizaje y su enseñanza. Su enfoque es la utilización de situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemática, los cuales son matematizados a través de modelos mediadores entre lo concreto y lo abstracto para formar relaciones más formales y estructuras abstractas [11]. La matemática desde esta perspectiva, se concibe como una actividad humana que consiste en matematizar, es decir, organizar o estructurar la realidad, incluyendo a la matemática misma [7].

Según lo que plantean Zolkower, Bressan y Gallego [24], las principales características de esta corriente son: a) Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos; b) El uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones; c) La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/ aprendizaje; d) El papel clave del docente como guía; e) La importancia de la interacción grupal y f) La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática. Todas éstas, se encuentran fundamentadas en los principios de la EMR que son: de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión.

Por otra parte, el enfoque de modelización de la EMR se enmarca fundamentalmente dentro del principio de niveles que se refiere al proceso de matematización que va sucediendo en una progresión, no estricta, de microniveles, lo que Treffers [20] denomina: matematización progresiva.

En este proceso de matematización progresiva, la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión que están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada [2]. Como lo explica Gravemeijer [9], los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal y en el proceso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante. Para el progreso desde el modelo de actividad matemática informal al de razonamiento matemático formal, Gravemeijer [8] establece cuatro tipos o niveles de actividad:

- Situacional: el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma (generalmente con recursos de fuera de la escuela).

- Referencial: implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional.

- General: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema.

- Formal: se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales, es decir, ya no se depende de modelos para lograr la actividad matemática.

Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido, por lo tanto, más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para monitorear sus procesos de aprendizaje [2].

2.2. La modelización matemática y su relación con la EMR

Según señala Trigueros [21], la modelación matemática ha pasado de ser un dominio de quienes se dedican a la matemática aplicada a un área de interés para la educación matemática y en consecuencia, ha adquirido un reconocimiento fundamental en la enseñanza misma de la matemática como una vía que permite contextualizar los conocimientos matemáticos. Lo anterior, conlleva a que sea posible hablar de modelación matemática en el ámbito escolar, aunque de diferentes perspectivas según la didáctica y los objetivos que se persigan.

En la actualidad existen diversas maneras de aproximarse a este proceso matemático en el aula y en concreto, Kaiser y Sriraman [14] recogen diferentes perspectivas internacionales que describen las tendencias actuales de investigación en la modelización matemática, enfatizando no sólo los fines de cada una de ellas sino que también los antecedentes que les han dado origen. En particular, la EMR, según estos autores, se inscribe en la perspectiva de modelación epistemológica y uno de los objetivos que tiene la modelización matemática desde este enfoque es promover el desarrollo de la teoría, es decir, lograr que los contenidos fundamentales de la matemática sean aprendidos en el trabajo con la modelación de fenómenos reales, pero sin perder aspectos importantes de la epistemología de los conceptos. Un ejemplo de esto, es el estudio realizado por Larson, Zandieh y Rasmussen [17] quienes basaron su investigación en la teoría de modelos y modelación junto a la heurística de la EMR, haciendo hincapié a que la secuencia didáctica para construir determinados contenidos de álgebra lineal (valores y vectores propios), se inició con un problema del mundo real, él que fue seguido por una serie de actividades que permitieron a los estudiantes razonar en distintos niveles hasta desarrollar formalmente los contenidos estudiados.

3. Metodología de la investigación

Este estudio es de carácter exploratorio y siguiendo la línea de la EMR se utiliza la metodología cualitativa de la investigación de desarrollo [2], la cual está basada en experiencias de aulas donde se ponen a prueba secuencias didácticas que se observan, registran, analizando hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos. De acuerdo a Freudenthal [7], la investigación de desarrollo significa experimentar el proceso cíclico de desarrollo e investigación de manera consciente e informarlo tan claramente que se justifique por sí mismo y que esta experiencia pueda ser transmitida a otros con el propósito de que la hagan propia.

Para responder al objetivo de esta investigación se elaboró una primera versión de la secuencia didáctica, la cual fue aplicada en el aula con estudiantes de primer año de ingeniería de la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Vilanova i la Geltrú en el periodo 2013-2014. Los resultados del estudio se analizaron y evaluaron con el propósito de refinar la secuencia didáctica para realizar una nueva intervención en el aula.

Los datos que se recogen en la realización de la investigación de desarrollo incluyen: grabaciones en vídeo de cada clase[i], grabaciones en audio[ii], copias del trabajo escrito de los estudiantes durante las clases y entrevistas individuales de estudiantes realizadas una vez que se aplicó la secuencia didáctica[iii].

4. La secuencia didáctica: Generando contraseñas seguras

4.1. Elaboración de la secuencia didáctica y su implementación en aula

Para el diseño e implementación de la secuencia didáctica se consideraron: los objetivos de aprendizaje, la trayectoria hipotética de aprendizaje, el rol del docente y el conjunto de tareas que forman la secuencia didáctica, la cual comienza con un problema real. Asimismo, la construcción de la secuencia didáctica se basó en los principios de la educación matemática realista, la modelización matemática y los niveles de Gravemeijer [8].

La secuencia didáctica contiene tres tareas que se inician con un problema real a partir del cual los estudiantes utilizando tanto su conocimiento matemático como su experiencia con contraseñas inician la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado hacia un conocimiento matemático formal de estos.

En este estudio participaron 30 estudiantes de primer año de ingeniería, los cuales no habían efectuado, previamente, ninguna práctica de modelización matemática. Por otra parte, las tres tareas que componen la secuencia comprendieron 3 sesiones de clase, las que se trabajaron en pequeños grupos (3 a 5 estudiantes) y el profesor tomó el rol de orientador.

4.2. Resultados y análisis de la aplicación de la secuencia en el aula

A continuación se describen los resultados de la secuencia didáctica presentando los aspectos relevantes de cada una de las tareas. También se expone cómo cada tarea se relaciona con los cuatro niveles de actividad propuestos por Gravemeijer [8].

4.2.1. Tarea 1: Generando contraseñas seguras

El principal objetivo de la tarea 1 es que los estudiantes introduzcan sus conocimientos y estrategias al problema planteado, es decir, que logren conectar éste con algún tipo de matemáticas, dándole nuevas interpretaciones a los conocimientos matemáticos que ya poseen.

El contexto elegido para la tarea 1 fue la generación de contraseñas. La información que se les entrega a los estudiantes es una noticia que informa de redes sociales hackeadas principalmente porque sus contraseñas eran “débiles”, dando a conocer a la vez, las características que deben tener éstas para ser “excelentes”. A continuación, se les comenta que actualmente existen infinidad de programas y páginas web que ofrecen crear claves excelentes, sin embargo, algunas personas no confían en internet y optan por generar sus propias claves, utilizando una planilla Excel. Seguidamente, se les muestran ejemplos de métodos para crear contraseñas usando Excel. Con los antecedentes anteriores, se les propone el siguiente desafío: crear en grupo un generador de contraseñas que contemple el uso de vectores.

En esta tarea, se encuentra presente el nivel situacional porque ésta invita a que los estudiantes trabajen en la construcción de conjunto generador y espacio generado en un contexto real como son las contraseñas, ya que como plantean Wawro et al. (2012) el nivel situacional debe incitar a los estudiantes hacia las metas matemáticas en un entorno experiencial real.

Para ejemplificar el proceso que siguieron los estudiantes se describe a continuación lo que hicieron los grupos 4 y 6. En ambos se observó que al caracterizar su generador de contraseñas son muy precisos, indicando como características, principalmente, las siguientes: número de componentes de su generador de contraseñas, tipo de codificación a utilizar o cualidades de las componentes. En relación a los modelos matemáticos propuestos, ambos grupos proponen vectores genéricos con 4 componentes, sin embargo, se ve en el grupo 6 que ninguno de sus modelos planteados tiene paréntesis para que se puedan identificar como vectores, por lo que se puede señalar que los estudiantes de este grupo tienen dificultad con la rigurosidad del lenguaje matemático. En el proceso de transición de contraseñas numéricas a contraseñas codificadas, el grupo 6 muestra una codificación simple, ya que cada número se remplaza directamente por un carácter (letra, número o símbolo especial) mientras que el grupo 4 presenta una más compleja, en la que el número que resulta de unir las componentes del vector se invierte para codificarlo y además, cada número tiene nueve caracteres diferentes por si se repite algún número en la contraseña numérica.

Finalmente, para exponer el funcionamiento y validar su generador de contraseñas, los grupos utilizan un ejemplo. Los estudiantes del grupo 6 muestran a través de su ejemplo como establecen conexiones que les permiten pasar del lenguaje matemático al lenguaje cotidiano e interpretar la matemática, de acuerdo al contexto que se está usando, es decir, en este caso, dándole sentido a los vectores, aunque muestran falta de rigurosidad en su notación matemática. Por su parte, en la solución propuesta por el grupo 4, se observa una mayor rigurosidad en el uso del lenguaje matemático, ya que en su ejemplo, los estudiantes toman su modelo matemático $(x, 2\mathrm{x}, x+2x)$ dándole un número específico a la variable x ($x = 011$) e inmediatamente, aplican su proceso de codificación para interpretar lo realizado matemáticamente al contexto del problema planteado, obteniendo así, una contraseña creada a partir de su generador de contraseñas *(@T(*_#)-%)*, lo que le permite validar éste, al mismo tiempo que exponen una solución a la situación propuesta.

4.2.2. Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado

Esta tarea corresponde a una actividad referencial porque tal como señalan Wawro et al. [23] todas las preguntas hacen alusión a la situación real propuesta inicialmente, pero ahora con un enfoque hacia una matemática más formal.

La tarea 2 se compone de dos apartados. En el apartado 1, se les pide a los estudiantes dos conjuntos, uno G que contiene todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro A que tiene vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtiene el vector genérico que crea sus contraseñas numéricas. Los grupos responden adecuadamente a esto, aunque presentan errores con la notación matemática.

Por consiguiente, una vez que anotaron los conjuntos A y G se les pregunta cuál es la relación entre estos con el propósito que la identifiquen para que posteriormente, la recuerden al relacionar A y G con conjunto generador y espacio generado, respectivamente para evitar la dificultad que indican Kú, Trigueros y Oktaç [16] referente a que en ocasiones los estudiantes no tienen clara la relación que existe entre ambos conceptos. Al analizar las respuestas de los grupos, predomina la idea de que la relación es que “A genera a través de la combinación lineal de sus elementos a los elementos de G”, es decir, los estudiantes logran establecer una conexión entre los conjuntos, la misma que más adelante la pueden aplicar para conjunto generador y espacio generado. Sin embargo, en gran parte de los grupos se ve como dificultad, el uso del lenguaje matemático en el momento de expresar su respuesta, puesto que por ejemplo, el grupo 2 señala que la relación entre ambos conjuntos es que “a partir de la combinaciones lineales de A se consiguen generar todas las contraseñas de G” pero quizás lo que quieren decir cuando anotan “combinaciones de A” es en realidad “las combinaciones lineales de los elementos de A”.

Finalmente, en este apartado se les pregunta si A y G tienen el mismo número de elementos. Siete de los ocho grupos indican que A tiene una cierta cantidad de elementos, indicando el número de estos, en tanto, G posee infinitos, es decir, los estudiantes logran establecer que la cantidad de elementos de los conjuntos son diferentes y lo que se pretende con esta interrogante es que extrapolen su respuesta a conjunto generador y espacio generado en el momento que realicen la analogía con los conjuntos A y G con el objetivo de evitar que los estudiantes confundan ambos conceptos, dificultad que es planteada por Nardi [17]. Cabe señalar que el grupo que no dio una respuesta adecuada fue porque confundió número de elementos con número de componentes de los vectores de los conjuntos.

A continuación, con el objetivo de que los estudiantes desarrollen imágenes geométricas de conjunto generador y espacio generado para luego, aprovecharlas en el desarrollo de las definiciones formales de estos, el profesor introduce los conceptos a través de la visualización geométrica, graficando vectores que se obtienen de multiplicar el vector $\overrightarrow{(1,2)}$ por un número real, preguntando a los estudiantes en qué lugar geométrico se encuentran estos. Una vez que identifican que están en una recta y la ecuación de ésta, el profesor presenta las definiciones formales de conjunto generador y espacio generado, dando ejemplos de cada uno, haciendo referencia a lo que se trabajó geométricamente.

Luego de esto, los estudiantes realizan el apartado II de la tarea 2 que consiste en hacer una analogía entre su generador de contraseñas creado en grupo y los conceptos de conjunto generado y espacio generado. Esta actividad sigue haciendo referencia al problema real, ya que se espera que constaten que no solo los vectores tienen sentido en el contexto de generar las contraseñas sino que también conceptos relacionados con él como son en este caso, conjunto generador y espacio generado.

Los grupos completan el apartado II de la tarea 2 y en general, todos hacen la analogía de acuerdo con su generador de contraseñas. El único obstáculo que se evidencia es que algunos grupos le designan otro nombre al conjunto generador, llamándole vector(es) generador(es) o conjunto de vectores, lo que muestra indicios de que hay dificultad con las distintas formas de representar este concepto. Además, se observa en las tablas de analogías que gran parte de los grupos logra visualizar conjunto generador y espacio generado en un contexto real y al mismo tiempo, matemático, o sea, tal como plantea Souto [19] reconocen los conceptos estudiados bajo diferentes aspectos a través de un tipo de visualización como es la analogía, lo que contribuye a que los estudiantes construyan los conceptos estudiados, al mismo tiempo que le encuentren sentido a lo que están aprendiendo y a su vez, disminuyan las dificultades planteadas por Kú et al. [16] y Nardi [18] referentes a estos conceptos al relacionarlos con algo más cercano a ellos.

4.2.3. Tarea 3: Aplicando lo aprendido

Un objetivo de la tarea 3 es cambiar el escenario de los estudiantes, es decir, dejar las actividades situacional y referencial relacionadas con generar contraseñas seguras para avanzar hacia los niveles de actividad general y formal respecto a conjunto generador y espacio generado. En esta tarea, utilizan estos conceptos para explorar y profundizar acerca de ellos, pero en problemas que involucran la notación convencional matemática.

Esta es una actividad general porque los estudiantes trabajan con preguntas que involucran tanto el concepto de conjunto generador como el de espacio generado, explorando sobre estos y además, como señalan Wawro et al. [23], ellos ya no se refieren explícitamente o vuelven al contexto específico que en este caso corresponde al de generar contraseñas seguras. Además, los últimos problemas planteados en la tarea 3 pueden ser considerados como actividad formal porque los estudiantes en su resolución solo utilizan notación convencional matemática. Los resultados de cuatro preguntas de esta tarea se presentan por pregunta a continuación.

- Pregunta 1: “¿Cómo le explicarías a un compañero cuál es la diferencia entre conjunto generador y espacio generado? Si lo consideras necesario, utiliza un ejemplo”. Esta pregunta tiene dos propósitos, por un lado ver si los estudiantes son capaces de establecer una diferencia entre conjunto generador y espacio generado, pero por otro, si saben comunicarlo utilizando adecuadamente el lenguaje matemático. La respuesta que predomina es que la diferencia entre los conceptos es que los elementos del conjunto generador crean al espacio generado. Las dificultades que se observan, en algunos grupos, es que utilizan ambos términos en notación matemática de forma intercambiada, situación que coincide con lo planteado por Nardi [18] quien señala que una dificultad con estos contenidos es que los confunden.

- Pregunta 2: “Establece la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: $B = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,2) \rangle$ tiene la misma cantidad de elementos que $C = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$, justificando tu respuesta”. El objetivo de esta pregunta es determinar si los estudiantes identifican en notación matemática a un conjunto que tiene un número finito o infinito de elementos, pero además, si los relacionan con conjunto generador y espacio generado. Para esta interrogante, la respuesta que dan la mayoría de los grupos es que el conjunto que corresponde a un espacio generado tiene infinitos elementos, en tanto, el otro, tiene una cantidad finita. Además, lo que se observa es que para justificar la cantidad de elementos de B, solo algunos indican que es un espacio generado, mientras que los demás, hacen una descripción de lo que ocurre para que B tenga infinitos elementos. Cabe señalar que nuevamente se evidencia la falta de rigurosidad en el uso del lenguaje matemático y un ejemplo de ello, se ve en la respuesta del grupo 4, quienes escriben "espacio generador" en vez de "espacio generado".

- Pregunta 3: "Con ayuda de gráficos, encuentra el espacio generado por los siguientes conjuntos generadores: (a) $A=\{(2,0)\}$, (b) $B=\{(1,0),(-1,1)\}$". En esta pregunta, a diferencia de las anteriores, los estudiantes deben utilizar solo lenguaje matemático convencional en su resolución. El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes determinen el espacio generado por un cierto conjunto generador, a partir de la visualización gráfica. Sin embargo, lograr este propósito, resultó complejo para los grupos, ya que todos requirieron orientación del profesor para trabajar en ella y si bien hubieron grupos que graficaron y determinaron el conjunto generador, otros simplemente no lo hicieron. La dificultad que se presentó, en algunos grupos, tiene que ver con la complejidad de utilizar varias representaciones en lenguaje matemático de los conceptos en estudio, ya que a partir del conjunto generador debían ir generando vectores del espacio generado, pero al mismo tiempo, graficándolos para ir observando cuál es el lugar geométrico en el que se encuentran esos vectores y finalmente, indicar en lenguaje algebraico la respuesta. Lo anterior, Dorier [5] lo clasifica como una dificultad relacionada con las diferentes formas de representar los objetos en álgebra lineal.

- Pregunta 4: "Establece la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: El vector $\overrightarrow{(2,-3)}$ pertenece al espacio generado por $B=\{(1,0),(0,-1)\}\subset\mathbb{R}^2$, justificando tu respuesta". El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes indiquen un proceso para justificar porque un vector puede o no pertenecer a un espacio generado. Gran parte de los grupos, indican que es verdadera y como justificación, muestran una combinación lineal de los vectores del conjunto generador que da como resultado el vector dado. Por su parte, los que afirman que es falsa, como los grupos 2 y 8 (ver imagen 7) se debe a que tienen dificultad para interpretar la frase "espacio generado por $B=\{(1,0),(0,-1)\}$", pues para ellos pareciera que es equivalente a indicar "conjunto $B=\{(1,0),(0,-1)\}$" y no han interiorizado que "espacio generado por B" es otra forma de representar "$E=\langle B\rangle$". Este tipo de obstáculo tiene que ver con la variedad de representaciones utilizadas en álgebra lineal, según lo que señala Dorier [5].

3. Conclusiones

El objetivo que se plantea en este estudio es diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica basada en el uso de la modelización matemática en la EMR que promueva la construcción de conjunto generador y espacio generado. Para responder a éste se ha escogido la investigación de desarrollo y se ha realizado un primer ciclo de aplicación de la secuencia didáctica creada para esta experiencia de aula.

La principal contribución de esta investigación ha sido entregar una primera aproximación de la forma en que la modelización matemática y la EMR pueden ser utilizadas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal.

A partir de los resultados podemos ver que esta primera versión de la secuencia didáctica presentó las siguientes ventajas:

- La tarea 1 que consiste en resolver un problema real admitió que los estudiantes hicieran uso de sus concepciones previas tanto del contexto que involucra la situación planteada (contraseñas seguras) como de su conocimiento matemático.

- La tarea 2 permitió a los estudiantes iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generador al explorar estos en una situación real para luego, establecer relaciones entre ellos. Además, contribuyó a que los estudiantes le encuentren sentido a lo que están aprendiendo y quizás también, a que disminuyan las dificultades que se presentan con estos conceptos, al relacionarlos con una situación cercana a ellos, a diferencia de las clases tradicionales en que los ven solo de forma abstracta.

- En la tarea 3, los estudiantes trabajaron con las definiciones de conjunto generador y espacio generado, evidenciándose por ejemplo, que la mayoría de ellos identifica la relación de inclusión que existe entre estos conceptos y también que reconocen las condiciones que debe cumplir un elemento para pertenecer a un espacio generado.

Por otra parte, el desarrollo de la secuencia didáctica mostró las siguientes dificultades:

- En todas las tareas de la secuencia didáctica, algunos estudiantes presentan problemas al expresar sus ideas empleando el lenguaje matemático, principalmente porque el uso de la notación matemática les resulta complejo.

- En la tarea 3 se observaron dos complicaciones, la primera de ellas relacionada con la pregunta que pide graficar para determinar el espacio generado por un conjunto generador dado, ya que los estudiantes necesitaron apoyo del profesor para tratar de responder a ésta y aun así, varios no lograron hacerla. Esto evidencia, que en esta secuencia didáctica, representar ejemplos específicos de los conceptos geométricamente, más que una ayuda para su comprensión, resultó ser un obstáculo. El otro inconveniente que se observó, solo en algunos grupos, es que presentaron la dificultad mencionada por Nardi [17] en relación a confundir ambos conceptos.

Considerando las ventajas y dificultades mostradas en esta primera aplicación de la secuencia didáctica creada para contribuir al aprendizaje formal de conjunto generador y espacio generado, se hace necesario considerar las siguientes modificaciones para el siguiente ciclo de aplicación de ésta:

- Elaborar una actividad de diagnóstico que recopile las concepciones previas de los estudiantes y a partir de ésta, construir tareas que refuercen estos conocimientos y especialmente lo referente al lenguaje matemático que utilizan durante la secuencia didáctica.

- Replantear la tarea 3 con la finalidad que se centre en preguntas en que los estudiantes realicen conjeturas acerca de conjunto generador y espacio generado, pero también que incorpore otras que sean propiamente del nivel de actividad formal. Además, eliminar la pregunta de construcción de gráficos para visualizar el espacio generado porque de acuerdo a los resultados, es un obstáculo más que una ayuda para el estudio de conjunto generador y espacio generado, puesto que es otra forma de representación matemática que se agrega, además, del lenguaje abstracto de álgebra lineal, pero también, debido a que solo son casos particulares de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, ya que para los demás espacios vectoriales no es posible realizar este tipo de representación.

- Incorporar evaluación formativa en el desarrollo de la secuencia didáctica con el propósito de ir observando los progresos y dificultades de los estudiantes en relación a conjunto generador y espacio generado para posteriormente, realizar una retroalimentación pertinente.

Finalmente, señalar que esta primera aplicación de la secuencia didáctica ha dado evidencias de que los estudiantes consiguen construir conjunto generador y espacio generado, al iniciar el estudio de estos, utilizando la modelización matemática en un problema real para luego, continuar con tareas construidas entorno a los niveles de actividad de Gravemeijer y los principios de la EMR. Lo anterior, porque les permite darle un sentido en contexto real a lo que están aprendiendo, lo que les sirve de base para continuar con otras actividades que lo conducen hacia un conocimiento formal de los conceptos, pero, por otra parte, también indagar tanto nuevas situaciones como contenidos matemáticos en interacciones con sus pares, disminuyendo la dependencia que poseen con el profesor.

Referencias bibliográficas

[1] Biembengut, M.;Hein, N. (2004). “Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática”. Educación Matemática, vol. 16, núm. 2, pp. 105-125, Ciudad de México (México).

[2] Bressan, A.; Zolkower, B. ; Gallego, M. (2004). “La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta”. Escuela de inverno en Didáctica de la Matemática, pp. 1-13, (Argentina).

[3] Carlson, D. ; Johnson, C. R. ; Lay, D. C. ; Porter, A. D. (1993). “The linear algebra curriculum Study group recommendations for the first course in linear algebra”. The College Mathematics Journal, vol. 24, núm. 1, pp. 41-46.

[4] Day, J. ; Kalman, D. (1999). “Teaching linear algebra: What are the questions”. Department of Mathematics at American University, pp. 1–16, Washington (USA).

[5] Dorier, J.-L. (2002). “Teaching linear algebra at university”. Ed. Li Tatsien, pp. 875–884, Beijing (China).

[6] Dorier, J. L. ; Sierpinska, A. (2001). “Research into the teaching and learning of linear algebra”. Ed. D. Holton, The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, pp. 255–273, Dordrecht (Holanda) (pp. 255-273).

[7] Freudenthal, H. (1991). “Revisiting mathematics education”. Ed. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Holanda).

[8] Gravemeijer, K. (1999). “How emergent models may foster the constitution of formal mathematics”. Mathematical Thinking and Learning, vol. 1, pp. 155-177.

[9] Gravemeijer, K. (2007). “Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling”. Springer US , pp. 137–144. New York (USA).

[10] Gómez i Urgellés, J. V.; Fortuny, J. M. (2002). “Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias”. Uno: Revista de didáctica de las matematicas, núm. 31, pp. 7-23, Barcelona (España).

[11] Heuvel-Panhuizen, M. (2002). “Realistic mathematics education as work in progress”. Common sense in mathematics education, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, pp. 1 - 42. Taipei (Taiwan).

[12] Hillel, J. (2000). “Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra”. Ed. J.-L. Dorier, On the teaching of linear algebra, pp. 191–208, Dordrecht(Holanda).

[13] Kaiser, G. (2010). “Introduction: ICTMA and the Teaching of Modeling and Applications”. Eds. R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford, Modeling students' mathematical modeling competencies, pp. 1-2, NY (USA).

[14] Kaiser, G.; Sriraman, B. (2006). “A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education”. (ZDM) the international journal on Mathematics Education, vol. 38 núm.3, pp. 302-310.

[15] Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). “Álgebra lineal”. Pearson Educación, (México).

[16] Kú, D.; Trigueros, M.; Oktaç, A. (2008). “Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE”. Educación Matemática, vol. 20, núm. 2, pp. 65-89, Ciudad de México (México).

[17] Larson, C.; Zandieh, M.; Rasmussen, C. (2008). “A trip through eigen-land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue”. Paper presented at the 11 Research in Undergraduate Mathematics Education Conference, San Diego (USA).

[18] Nardi, E. (1997). “El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectoria”l. Educación Matemática, vol. 9, núm.1, pp. 47-60, Ciudad de México (México).

[19] Souto (2013). “La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: el caso de los Espacios Vectoriales Cociente”. Tesis de doctoral no publicada, Universidad Complutense de Madrid, Madrid (España).

[20] Treffers, A. (1987). “Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction:The Wiskobas project”. Kluwer, Dordrecht (Holanda).

[21] Trigueros, G. (2009). “El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas”. Innovación Educativa, vol.9, núm. 46, pp. 75-87, Ciudad de México (México).

[22] Vanegas, J.; Henao, S. (2013). “ Educación matemática realista: La modelización matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos”. Actas del VII CIBEM ISSN, pp.2883-2890, Montevideo (Uruguay).

[23] Wawro, M.; Rasmussen, C.; Zandieh, M.; Sweeney, G. F.; Larson, C. (2012). “An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence”. PRIMUS, vol. 22, núm. 8, pp. 577-599, London (UK).

[24] Zolkower, B.; Bressan, A.; Gallego, F. (2006). “La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores”. Yupana, vol. 1, núm. 3, pp. 11-33, Santa Fe (Argentina).

Bibliografía complementaria

[25] Gómez, J. (1998). “Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari”. Tesis de doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona (España).

[26] Montero, J.; Badía, D. (2011). “Modelización matemática y Álgebra: un tándem perfecto en la formación de ingenieros”. Modelling in Science Education and Learning, vol. 4, núm. 3, pp. 21-33, Valencia (España).

[27] Possani, E.; Trigueros, M.; Preciado, J. G.; Lozano, M. D. (2010). “Use of models in the teaching of linear algebra”. Linear Algebra and its Applications, vol.432, núm. 8, pp. 2125-2140, Kidlington (UK).

[28] Trigueros, M.; Possani, E. (2013). “Using an economics model for teaching linear algebra”. Linear Algebra and its Applications, vol. 438, núm. 4, pp. 1779-1792, Kidlington (UK).

---

[i] Se puede ver un breve extracto de un grupo cuando su contraseña numérica la está codificando en https://www.dropbox.com/s/f4x4b253wngkc5o/extracto%20video.ts?dl=0

[ii] Se puede escuchar un breve extracto de un grupo cuándo se encuentra decidiendo cuál será su “patrón” (modelo) para generar contraseñas en https://www.dropbox.com/s/f2lufrer2qlnlo2/extracto%20audio%20de%20un%20grupo.wav?dl=0

[iii] Se puede escuchar un extracto de una entrevista realizada a un estudiante referente a la última tarea de la secuencia didáctica en https://www.dropbox.com/s/5uokx46scb2tl48/extracto%20entrevista%20estudiante.wav?dl=0