La competencia de reconocer el proceso *unitizing* en las respuestas de los estudiantes

Àngela Buforn Lloret; Ceneida Fernández Verdú

angela.buforn@ua.es; ceneida.fernández@ua.es

Universidad de Alicante

RESUMEN

Este estudio examina la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro (EPM) y su capacidad para reconocer evidencias de la comprensión en los problemas que implican el proceso *unitizing como una componente del razonamiento proporcional. El proceso unitizing* involucra la búsqueda de una unidad de referencia para resolver tareas de razonamiento proporcional. 92 EPM realizaron una tarea que estaba formada por tres respuestas de estudiantes de primaria a un problema que implicaba el proceso *unitizing* y cuatro cuestiones sobre la enseñanza y aprendizaje. Los resultados muestran cinco perfiles de EPM en relación a la manera en la que identificaron diferentes características del proceso *unitizing* en las respuestas de los estudiantes.

Mirada profesional, proceso "unitizing", unidad de referencia, conocimiento del profesor

Introducción

El desarrollo del razonamiento proporcional entendido como *la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades* (Lamon, 2005) es un objetivo en el currículo de Educación Primaria y Secundaria que demuestra ser difícil para los estudiantes. El razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente), las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y *unitizing*) y la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Lamon, 2005, 2007; Pitta-Pantazi y Christou 2011).

En esta comunicación nos centraremos en una de estas componentes, el proceso *unitizing,* entendida como el proceso cognitivo que implica ser capaz de concebir una cantidad dada formada por varios trozos del mismo tamaño (o varios conjuntos formados por el mismo número de piezas) como una unidad (Lamon, 2007). Por ejemplo una caja de 24 refrescos se puede ver como 24 (latas o 1-unidad), 2 (2 packs de 12 latas), 4 (4 packs de 6 latas), etc. es decir, el 24 se puede concebir formado por varios subconjuntos (packs) con el mismo número de latas.

En el razonamiento proporcional, el proceso cognitivo de formar y usar una unidad formada por varias unidades juega un papel relevante, en particular, en los problemas de comparación de razones. Para poder resolver este tipo de problemas, es necesario identificar una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades (razones) y usar esta unidad para comparar (*unitizing)*. Por ejemplo, en el siguiente problema de comparación numérica:

> *La caja con 16kg de cereales A cuesta 3,36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2,64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?*,

es necesaria la identificación de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para comparar. Por ejemplo, se puede tomar como unidad de referencia 1kg de cereales comparando así las razones 3,36€/16kg (euros un kilo) y 2,64/12 €/Kg,o determinar el coste de 4kg de cereales en cada caso, comparando así las razones para 4 kg de cereales de la caja A y 4kg de cereales de la caja B (0,84€/4kg y 0,88€/4kg, por lo tanto para 4kg es más barato comprar la caja A, ya que vale 0,84€), o el coste de 12 kg de cereales (2,52€/12kg y 2,64€/12kg, por tanto también podemos comprobar que la caja A vale 2,52€ para 12kg). Es decir, se trata de tomar la unidad de referencia que sea más cómoda para poder obtener la respuesta al problema.

Estudios recientes han mostrado que la enseñanza de la idea de razón que subyace en el proceso cognitivo de *unitizing* no es una tarea fácil para los maestros. Las investigaciones han mostrado que los estudiantes para maestro poseen un conocimiento matemático limitado de este proceso (Buforn y Fernández, 2014; Livy y Vale, 2011). Por ejemplo, en el reconocimiento de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón (Valverde y Castro, 2009), y en la interpretación de las razones (magnitudes que se están comparando) en tareas de comparación de razones (Gómez y García, 2014). La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificultará a los estudiantes para maestro para realizar tareas profesionales como interpretar las respuestas de los estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes. El estudio presentado aquí tiene como objetivo examinar la relación entre el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y cómo interpretan las respuestas de estudiantes a tareas que requieren el uso del proceso cognitivo *unitizing*

Conocimiento de matemáticas e interpretación de respuestas de estudiantes

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente “mirar profesionalmente” (professional noticing) la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs, Philipp, 2010; van Es y Sherin, 2002). Esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas pero la idea común que subyace es subrayar la manera en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Un aspecto particular de esta competencia es mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) que implica reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos para tomar decisiones de enseñanza pertinentes (Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Morris, Hiebert y Spitzer, 2009; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Estas investigaciones han mostrado que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos le permite estar en mejores condiciones para reconocer lo que pueden ser evidencias de la comprensión de los estudiantes de un tópico matemático. Estos estudios subrayan la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

Teniendo en cuenta estas referencias, nos centraremos en examinar qué evidencias del proceso *unitizing* reconocen los estudiantes para maestro en respuestas de estudiantes de educación primaria y qué tipo de decisiones de acción toman para apoyar el desarrollo de este proceso. Considerando estos aspectos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿qué conceptos matemáticos identifican los estudiantes para maestro como importantes en las tareas que implican el proceso *unitizing*?
- ¿qué evidencias del proceso *unitizing* reconocen los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes de primaria?
- ¿qué tipo de tareas proponen los estudiantes para maestro para apoyar el desarrollo del proceso *unitizing* en los estudiantes de primaria?

Método

Participantes y contexto

Los participantes de este estudio fueron 92 estudiantes para maestro de educación Primaria (EPM) matriculados en un programa de formación inicial. Estos estudiantes habían cursado, previo a la recogida de datos, una materia centrada en el Sentido Numérico y otra en el Sentido Geométrico. En el momento de la recogida de datos, los EPM estaban cursando una asignatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria cuyos contenidos son las características del aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y propuestas de enseñanza en diferentes dominios matemáticos: números y operaciones, geometría, medida y tratamiento de la información. Los datos se recogieron después de estudiar el bloque de números y operaciones donde se incluye el tópico del razonamiento proporcional.

Instrumento

Los estudiantes para maestro respondieron a una tarea formada por tres respuestas de estudiantes de primaria a un problema que implicaba el proceso *unitizing y* que mostraban diferentes características del proceso y cuatro cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje. Las cuestiones son las siguientes:

a) *¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver este problema? Justifica tu respuesta.*

b) *¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas de los estudiantes? Justifica tu respuesta.*

c) *Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.*

d) *Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.*

Las dos primeras cuestiones pedían a los estudiantes para maestro identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema y justificar cómo consideraban que las tres respuestas de los alumnos de primaria reflejaban alguna característica de la comprensión de los estudiantes. En las otras dos cuestiones se les pedía proponer decisiones de acción (modificar el problema) para que el estudiante pudiera alcanzar la comprensión de los contenidos matemáticos implicados (es decir, el objetivo de aprendizaje identificado) o afianzarlo en el caso de asumir que las respuestas dadas mostraban una comprensión adecuada.

La figura 1 muestra las respuestas de los estudiantes de primaria al problema que formaban parte de esta tarea.

La caja con 16kg de cereales A cuesta 3,36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2,64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?

Respuesta 1

16 kg A → 3'36   12 kg B → 2'64

$A: \frac{3'36}{16}$ kg → 0'21 el kg $B: \frac{2'64}{12}$ → 0'22 el kg.

La caja A es más barata pq el kilo vale 0'21 y el B 0'22.

Respuesta 2

16 kg → 3'36 / 12 kg → 2'52 €
12 kg → 2'64

16 kg → 3'36
12 kg → x
$\left.\right\}$ $\frac{12 \cdot 3'36}{16}$ = 2'52 € con 12 kg.

Es más barata la caja A porque con 12 kg cuesta 2'52 € sin embargo la B cuesta 2'64 €.

Respuesta 3

$\boxed{A \; 16\,kg}$ = 3'36 €
$\boxed{B \; 12\,kg}$ = 2'46 €

Es más barata la caja A ya que contiene 4 kg más y sólo hay de diferencia 0,9.
3'36 − 2'46 = 0'9 €

Figura 1. Problema y las tres respuestas de los estudiantes que reflejaban diferentes características

Las tres respuestas muestran diferentes características relativas al desarrollo del proceso "unitizing". En la Respuesta 1, el estudiante identifica las razones euro/kilos para obtener el precio de 1kg de cereales en cada caja y luego las compara, es decir, usa como unidad de referencia 1kg. En la Respuesta 2, el estudiante usa como unidad 12kg, obteniendo su valor mediante una regla de tres, una vez obtenido el coste de 12kg en el caso A, lo compara con la situación B. Y en Respuesta 3, el estudiante calcula la diferencia entre los precios sin tener en cuenta los kg de cada caja utilizando una estrategia aditiva incorrecta para este problema.

Análisis de los datos

Se analizaron las respuestas dadas por los EPM a las cuatro cuestiones planteadas siguiendo un proceso inductivo de generación de categorías desde los datos. En primer lugar, identificamos los conceptos matemáticos que los estudiantes para maestro identificaban en el problema propuesto (cuestión a). La identificación de estos conceptos está relacionado con la manera en la que estos estudiantes para maestro consideraban que el problema propuesto se resolvía buscando una unidad de referencia que les permitiese comparar. Se identificaron dos categorías: estudiantes para maestro que reconocían elementos matemáticos que podían estar asociados al proceso *unitizing* (búsqueda de una unidad de referencia que les permita comparar), y los estudiantes para maestro que no identificaban esta idea y simplemente realizaban comentarios generales sobre razón o proporción. En segundo lugar, se analizaron qué evidencias del proceso *unitizing* reconocían los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes (cuestión b) generándose tres grupos de respuestas:

- argumentos generales (por ejemplo basados en la corrección o no de la respuesta),
- aportando como evidencia una descripción de las respuestas de los estudiantes

- reconociendo evidencias del proceso de identificación de una unidad de referencia y usar dicha unidad para comparar en las respuestas de los estudiantes (proceso *unitizing*)

La consideración conjunta de los elementos matemáticos y las evidencias del proceso *unitizing* que los estudiantes para maestro eran capaces de identificar en las respuestas de los estudiantes de EPM nos permitió identificar perfiles.

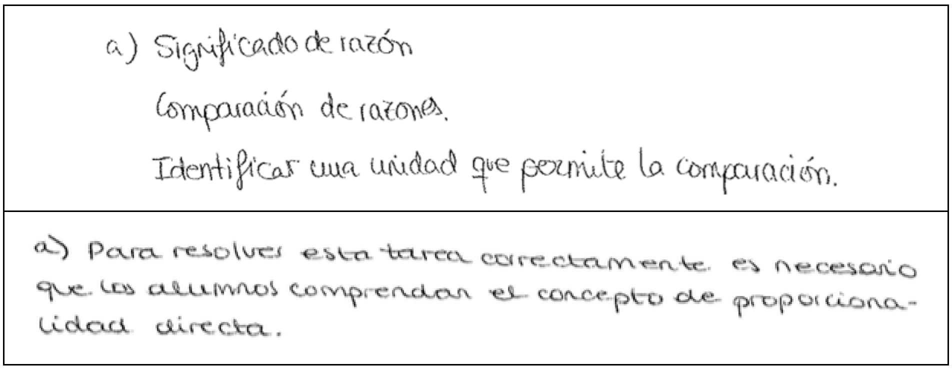
Para el análisis de las cuestiones c y d (decisiones de acción), se generaron de manera inductiva categorías que se fueron refinando a medida que el análisis iba progresando (estas categorías se muestran en el apartado de resultados).

Resultados

Este apartado se divide en dos subsecciones. En la primera parte se muestran los perfiles de estudiantes para maestro considerando la relación entre el conocimiento de matemáticas y su capacidad para identificar diferentes características del proceso *unitizing* atendiendo a si interpretaban, describían o proporcionaban comentarios generales en relación a las respuestas de los alumnos de primaria. En la segunda parte se describe la relación entre los perfiles y las modificaciones del problema realizadas por los EPM.

Perfiles de estudiantes para maestro

Obtuvimos 2 grupos de EPM considerando los elementos matemáticos que reconocían en el problema: los EPM que identificaron el proceso *unitizing* (C) y los EPM que no identificaron el proceso *unitizing* (O). La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante para maestro de cada grupo. En la primera, el EPM reconoce la necesidad de conocer la idea de razón, realizar una comparación identificando una unidad de referencia que le permita comparar, y el segundo EPM simplemente comenta que se tiene que conocer el “concepto” de proporcionalidad directa.


a) Significado de razón
Comparación de razones.
Identificar una unidad que permite la comparación.

a) Para resolver esta tarea correctamente es necesario que los alumnos comprendan el concepto de proporcionalidad directa.

Figura 2. Respuestas de EPM de las categorías en la cuestión a)

Uniendo estos dos grupos con las categorías que describían cómo los EPM reconocían el proceso *unitizing* en las respuestas de los estudiantes generamos cinco perfiles de estudiantes para maestro:

- EPM que identificaron el proceso *unitizing* como la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar y reconocieron este proceso en las respuestas de los estudiantes (CI). Por ejemplo, la respuesta del EPM de la Figura 3 reconoce en la respuesta 1 del estudiante la identificación de las razones para comparar, en la respuesta 2 el uso de 12kg como unidad para comparar y en la respuesta 3 se emplea una estrategia aditiva incorrecta.

b) Resp. 1 → Identifica los razones €/Kg y los compara.

Resp. 2 → Utiliza los 12kg como unidad para comparar
Uso de la regla de 3 para obtener el precio de 12Kg.

Resp. 3 → No identifica las razones. Usa relaciones aditivas.

Figura 3. Respuesta de un EPM perteneciente al grupo CI

- EPM que identificaron el proceso *unitizing* como la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar pero que solo describieron las respuestas de los estudiantes (CD). Por ejemplo, el EPM de la Figura 4 describe las estrategias usadas por los estudiantes, en la respuesta 1 solo comenta que compara las razones sin identificar "la razón unitaria", en la respuesta 2 la referencia al uso del 12kg se realiza al describir lo que el estudiante ha hecho al decir que calcula cuanto son 12kg mediante una regla de tres, pero no comenta que ese 12 sirve para poder comparar, y en la respuesta 3 describe lo que hace el estudiante sin hacer mención al uso de una relación aditiva. En esta categoría, la manera en la que los EPM analizan las tres respuestas muestra un uso poco explícito de cómo la comparación de razones pone en juego la idea de una unidad múltiple de referencia especialmente al comentar la Respuesta 3.

b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas?

- Respuesta 1: lo realiza bien, ya que reconoce que es un problema de proporcionalidad y compara las razones de las dos cantidades.
- Respuesta 2: la respuesta está bien, aunque realiza una regla de tres y sería mejor si hubiera utilizado una estrategia de proporcionalidad como el uso de estrategias escalares o funcionales. Ha sacado lo que cuesta 12 Kg de la caja A, que es más barata que la caja B.
- Respuesta 3: la justificación no está bien argumentada, ya que dice que es más barata porque contiene 4 kg más y solo hay de diferencia 0.9 €, pero no ha realizado ninguna comparación de razones para averiguarlo.

Figura 4. Respuesta de un EPM perteneciente al grupo CD

- EPM que identificaron el proceso *unitizing* como la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar y proporcionaron comentarios generales y poco específicos (CG). Por ejemplo, el EPM de la Figura 5 solamente comenta que el estudiante ha realizado el problema correcta o incorrectamente.

b)

- Respuesta 1: lo resuelve correctamente aplicando la idea de razón y realizando la comparación.

- Respuesta 2: lo resuelve correctamente aplicando la idea de proporcionalidad para poder hacer la comparación.

- Respuesta 3: no aplica los conceptos necesarios, sino que lo resuelve como si fuera un problema de estructura aditiva.

Figura 5. Respuesta de un EPM perteneciete al grupo CG

- EPM que no identificaron el proceso *unitizing* como la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar y describieron las respuestas de los estudiantes (OD). En este caso, el EPM de la Figura 6 describe la estrategia usada por los estudiantes y no comenta nada sobre la idea de buscar una unidad para poder comparar.

Tarea 4 R1: entiende la relación o razones entre las magnitudes externas (kg y €).
R2: Hace una regla de tres, por tanto, es mecánico.
R3: No entiende, aplica restas sin pensar. No entiende la razón entre las magnitudes.

Figura 6. Respuesta de un EPM perteneciente al grupo OD

- EPM que no identificaron los elementos matemáticos que apoyan el proceso *unitizing* como la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar y que proporcionaron comentarios generales (OG) sobre la comprensión y desarrollo del proceso puesto de manifiesto en las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, el EPM de la Figura 7, se limita a hablar de si comprende o no comprende sin mostrar evidencias de dicha comprensión.

b) 1. Nivel de comprensión adecuado a los conceptos implicados.
2. La respuesta es correcta pero no podemos saber si comprende las relaciones de proporcionalidad porque lo resuelve utilizando la regla de tres.
3. La respuesta es correcta pero realizada con suposiciones. Por ello no conocemos su nivel de comprensión.

Figura 7. Respuesta de un EPM perteneciente al grupo OG

Estos perfiles muestran que cuando los EPM son capaces de identificar el proceso *unitizing*, interpretan de manera más o menos explícita las respuestas de los estudiantes aportando evidencias de cómo los estudiantes de primaria emplean el proceso de *unitizing*. Sin embargo, cuando no son capaces de identificar el proceso *unitizing*, solamente describen las respuestas de los estudiantes proporcionando comentarios generales sobre la comprensión puesta de manifiesto.

Modificaciones del problema realizadas por los EPM

Respecto a las decisiones de acción tomadas por los EPM para ayudar en el desarrollo del proceso *unitizing* se centraron en diferentes aspectos. Por ejemplo, cambiar los números decimales a números enteros o más bajos, que las razones que era posible establecer fuesen enteras (es decir usando números múltiplos entre si), que la diferencia entre los datos proporcionados fuese más significativa, que solamente hubiese una magnitud para comparar y volver a explicar el contenido (Figura 8).

Nº más enteros y más bajos	**c)** Para que el alumno comprendiera los conceptos matemáticos implicados llevaría a cabo la misma tarea pero sin números decimales y con números más pequeños. Por ejemplo: 6 kg cuestan 3€ y 8 kg cuestan 5€.

Razones enteras	c) Esta tarea se podría facilitar cambiando las razones no enteras, por otras que sí lo son, ya que los niños tienen menos dificultades para resolver los problemas de proporcionalidad con las enteras.
Diferencia más significativa	Utilizando diferencias más significativas es decir en las unidades.
Comparar una sola magnitud	c) La actividad sería más fácil si contase con la misma cantidad de kilos en ambas cajas. 16 kg. de cereales A. 16 kg. de cereales B.
Explicar contenido	Le explicaría que para saber cuál es mas cara, necesita saber cuánto vale la misma cantidad de cada producto para poder compararlo.

Figura 8. Ejemplos de modificaciones del problema para ayudar a los estudiantes a desarrollar el proceso *unitizing*

Hay que tener en cuenta que algunos EPM dejaron la cuestión en blanco o propusieron tareas sin sentido, o bien porque no correspondían con el concepto implicado (el proceso *unitizing*) o bien porque no cambiaba el nivel del problema. Teniendo en cuenta los perfiles comentados anteriormente, los grupos donde no se identificó el proceso *unitizing* (OD y OG) tenían las respuestas en blanco o sin sentido más numerosas que en los grupos que si que habían identificado el proceso *unitizing*. De manera general, todos los grupos proponían tareas relacionadas con modificar el tipo de número o razón y pocos sugirieron tareas relacionadas de manera más directa con el proceso *unitizing*.

Por otro lado, en cuanto a las decisiones de acción tomadas por los EPM para progresar en el desarrollo del proceso *unitizing* fueron: que las razones fuesen más similares o cercanas, los números más altos o racionales, proponer más elementos a comparar, resolver la tarea usando más de una estrategia o cambiar a un contexto menos familiar (Figura 9).

Razones similares	Utilizaría números más cercanos entre sí, donde la diferencia de las razones estuviera en las centésimas o milésimas.
Nº altos o nº racionales	**d)** Para que el alumno aumentara su comprensión de los conceptos implicados propondría un ejercicio en el cuál el enunciado fuera más complicado y tanto los kilogramos como lo que cuesta cada caja de cereales fueran números decimales.
Más elementos a comparar	d) Para hacer la tarea más difícil pondría una tercera caja de cereales para que comparase entre tres
Usar diferentes estrategias	d. Le pediría al alumno que realizara el mismo ejercicio utilizando dos estrategias diferentes.
Cambiar contexto	d) Variable de tarea. Contextos menos familiares. (mezcla)

Figura 9. Ejemplos de modificaciones del problema para mejorar la comprensión de los estudiantes

Del mismo modo que para las decisiones para ayudar a los estudiantes, en este caso también hubo EPM que dejaron la cuestión en blanco o propusieron tareas sin sentido, o bien porque no correspondían con el concepto implicado (el proceso *unitizing*) o bien porque aumentaban el nivel del problema. Teniendo en cuenta los perfiles de estudiantes para maestro obtenidos, fueron numerosos los estudiantes que dejaron las cuestiones en blanco o propusieron tareas sin sentido, pero a diferencia de la cuestión c), en este caso ocurría en todos los grupos. Esto sugiere que modificar tareas de manera que aumente la dificultad es más difícil para los EPM que proponer tareas para ayudar a los estudiantes a desarrollar el proceso *unitizing*.

Discusión

El objetivo de esta investigación es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Estudios previos han aportado información en otros dominios como el álgebra (Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013) y la derivada (Sánchez-Matamoros et al. 2014). Nuestro estudio se ha centrado en el proceso *unitizing* como componente del razonamiento proporcional.

Los resultados obtenidos indican que la tarea de interpretar respuestas de estudiantes proporcionando evidencias de la comprensión de un tópico matemático no es una tarea fácil para los estudiantes para maestro, aun habiendo identificado los conceptos matemáticos que implican el problema (conocimiento de matemáticas). Esto se evidencia en el grupo de estudiantes que habiendo identificado el proceso *unitizing*, proporcionan argumentos generales. Este resultado también se podría interpretar desde las creencias, en el sentido de que estos EPM podrían tener la creencia de que las respuestas de los estudiantes “son correctas o incorrectas” (es decir, o se comprende o no se comprende) (Copes, 1982).

Los resultados muestran que cuando los estudiantes para maestro eran capaces de identificar los elementos matemáticos que determinan el proceso *unitizing*, eran capaces de interpretar las respuestas de los estudiantes aportando evidencias de cómo los estudiantes de primaria empleaban el proceso de *unitizing* de manera más o menos explícita. Sin embargo, cuando no eran capaces de identificar los elementos matemáticos del proceso *unitizing* solamente describían las respuestas o proporcionaban comentarios generales basados en la corrección. Este resultado corrobora estudios previos realizados en otros tópicos matemáticos que indican que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos (conocimiento matemático) es necesario ya que le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias del aprendizaje de los estudiantes de un tópico matemático y poder seleccionar e identificar las actividades para progresar en su aprendizaje (conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes) (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Fernández et al., 2012; Magiera et al., 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2014; Yesildere-Imre y Akkoç, 2012), pero que el conocimiento de matemáticas no es suficiente para esta tarea profesional ya que había EPM que identificaban los elementos matemáticos, pero no daban evidencias de haber reconocido características del proceso *unitizing en las respuestas de los estudiantes*.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana

Referencias

[1] Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. Journal of Mathematics Teacher Education, 16, 57-79.

[2] Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

[3] Callejo, M.L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

[4] Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A methaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 38-44.

[5] Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

[6] Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

[7] Jacobs, V., Lamb, L. & Philipp, R. (2010). Porfessional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202.

[8] Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[9] Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

[10] Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

[11] Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics, 84, 93-113.

[12] Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

[13] Morris, A.K., Hiebert, J. & Spitzer, S.M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn?. Journal for Research in Mathematics Education, 40(5), 491-529.

[14] Pitta-Pantazi,D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

[15] Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education,* DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y

[16] Sherin, M. G., Jacobs, V. R. & Philipp, R. A. (Eds) (2010), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge.

[17] Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

[18] Van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Technology and Teacher Education, 10(4), 571-596.

[19] Yesildere-Imre, S., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. Journal of Mathematics Teacher Education, 15, 207-226.