Funciones elementales con GeoGebra

Francisco Haro Laguardia

email: calzmex@yahoo.es

IES Jándula, Andújar – Jaén

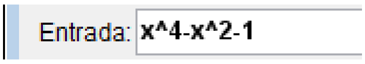
RESUMEN

GeoGebra es un hardware muy desarrollado y que de forma muy sencilla ofrece una representación gráfica de las funciones. En este taller aprenderemos a representar funciones elementales y funciones a trozos. Estudiaremos la continuidad y derivabilidad de funciones que dependen de un parámetro, y el cálculo de los puntos críticos de las mismas con el uso de la derivada y los comandos que GeoGebra nos ofrece.Las funciones elementales y sus transformaciones son parte importante del currículum de matemáticas, y el uso de deslizadores resulta muy útil para entender las trasformaciones de las gráficas de las funciones elementales.

GeoGebra, TIC, Funciones

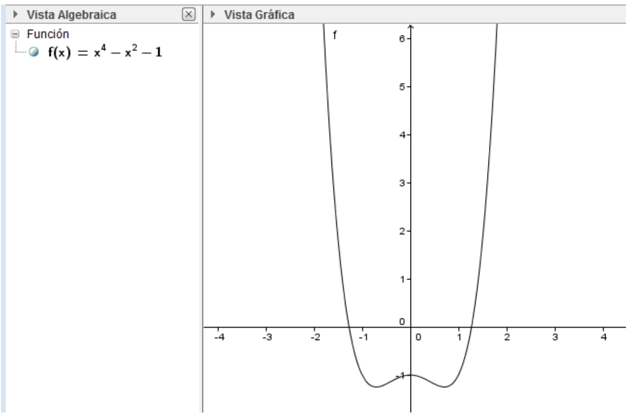
Representación de funciones con GeoGebra

Para obtener la gráfica de una función y = f(x) basta con introducir la expresión a través de la línea de comandos.



El programa le asignará un nombre, en este caso f(x) cuya ley de formación aparecerá en la Vista algebraica y su representación en la Vista gráfica.

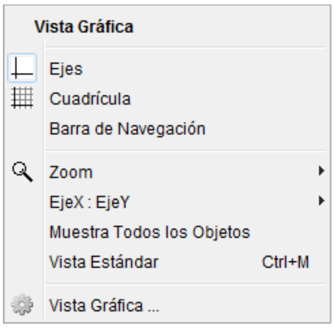
Obtendremos al pulsar Enter la gráfica de la función:



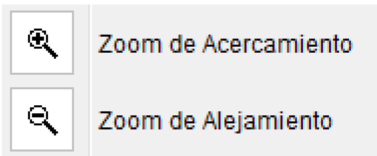
En ocasiones, será necesario ajustar la escala de representación para cada uno de los ejes o realizar acciones de zoom para lograr una mejor visión de la función representada.

Para conseguir estas acciones, disponemos de las opciones necesarias a las que se accede pulsando el botón derecho del ratón en un lugar libre de la Vista gráfica.

Aparecerá el menú siguiente:



La opción Zoom permite ampliar o reducir la vista gráfica a la escala deseada. También podemos hacer un zoom para acercar o alejar la imagen con ayuda de la rueda del ratón o pulsando sobre las herramientas:



No hay problema en hacer cualquier zoom ya que podemos volver a la vista por defecto pulsando la opción Vista Estándar disponible en el menú anterior, o también en la parte superior izquierda de la vista gráfica al activar la pestaña

Para cambiar la relación de escala entre los ejes, al pulsar sobre la opción EjeX:EjeY aparecerá un nuevo menú desplegable para selecciona la nueva relación entre los ejes X e Y, que por defecto es 1:1

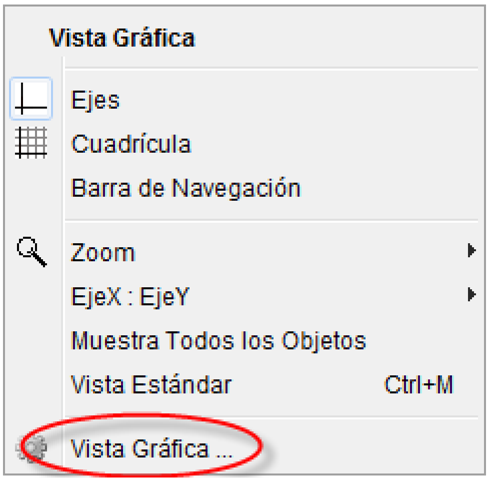
Actividad 1

Representar la función $f(x) = 8x^2 + 30$. Ajustar la escala de los ejes para que aparezca la función.

Actividad 2

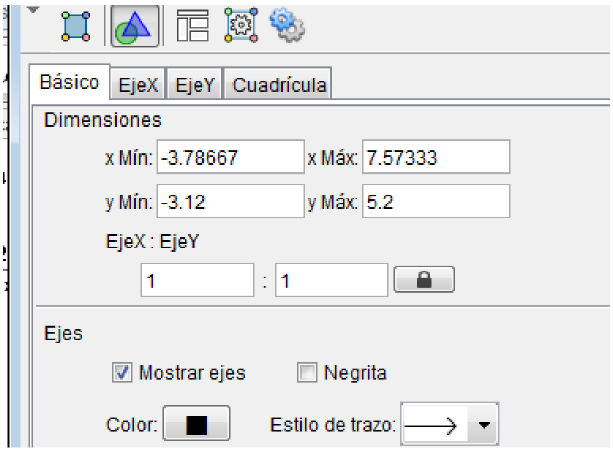
Representar la función $f(x) = \dfrac{2x-31}{x+18}$. Utilizar el Zoom para visualizar la función.

Para establecer un rango de valores para la representación de los ejes hay que acceder a la opción Vista gráfica en el menú que aparece al pulsar el botón derecho del ratón en un espacio libre de esta vista.



El segundo botón que encontramos en la parte superior corresponde a Preferencias-Vista gráfica

Este botón permite modificar los valores, escalas y características de los ejes y de la cuadrícula.

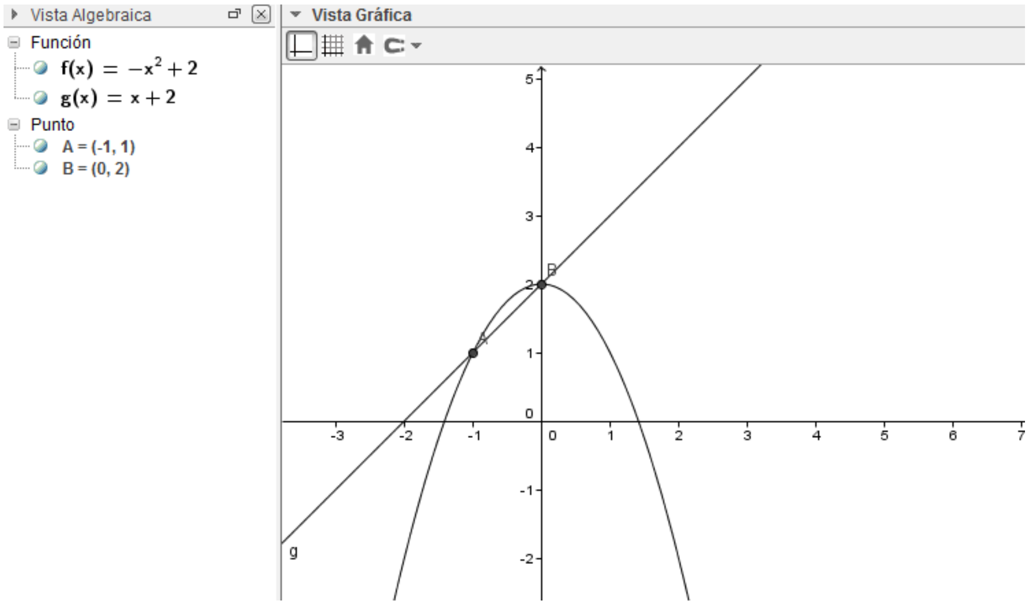


También se podrá acceder a las opciones anteriores a través de Avanzado en el menú Opciones.

En las funciones representadas se podrán estudiar sus elementos a través de distintos comandos y opciones disponibles en GeoGebra

Por ejemplo se podrán calcular los puntos de intersección de dos funciones ya que GeoGebra considera a cada una de ellas como un objeto al que se pueden aplicar las distintas herramientas disponibles.

En este caso, bastará con seleccionar la herramienta Intersección de dos objetos  para obtener las coordenadas de los puntos de corte entre la parábola y la recta representadas, o seleccionando la herramienta Punto y colocándose sobre los puntos de intersección



Actividad 3

Obtener los puntos comunes de las funciones $f(x)=\dfrac{1-x}{x+2}$ y $g(x)=-x^2$

Actividad 4

Dadas las funciones $f_n(x) = x^n$ para n=1,2,3,4. Hallar los puntos de corte de $f_1 \cap f_2$;

$f_1 \cap f_3$; y $f_2 \cap f_4$. Utilizar colores diferentes para representar las funciones.

Cuando las expresiones de las funciones que se desean representar siguen alguna relación, como es el caso anterior, disponemos del comando Secuencia para generar de manera automática la lista correspondiente a las leyes de formación y por tanto, también su representación gráfica.

La sintaxis de este comando es:

Secuencia[expresión, variable, valor inicial, valor final, incremento]

Para las funciones anteriores, escribiremos en la línea de entrada la expresión siguiente:

Secuencia[x^n,n,1,4] (aquí falta el incremento, que cuando no se escribe GeoGebra entiende que es 1)

El resultado será la lista compuesta por las expresiones $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ y la representación de las cuatro funciones.

Actividad 5

Utilizando el comando secuencia representa las parábolas $f(x)=ax^2$, para a = 0.2; 0.4; 0.6;…1.8;2. Es importante saber que si no queremos que el parámetro a esté elevado al cuadrado pondremos $a*x^2$, o intercalaremos un espacio entre a y x^2 (esto será válido para cualquier potencia par)

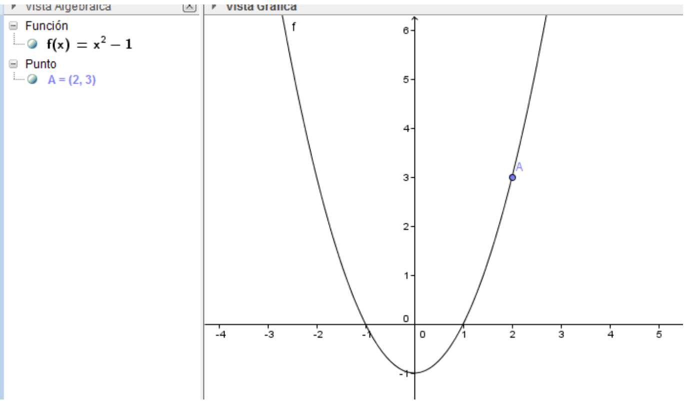
Funciones definidas en intervalos

Además, para limitar la representación de una función para valores de la variable independiente dentro de un intervalo $[x_1, x_2]$ disponemos del comando Función, cuya sintaxis es: Función[f(x), x_1, x_2]

Actividad 6

Representa la función f(x)= senx en el intervalo [-π,π]. Para representar la función seno se usa la expresión "sen(x)"

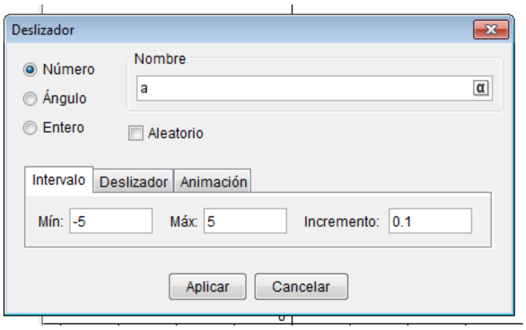
Utilizando la herramienta Punto se puede crear un punto sobre una función previamente representada. Las coordinadas del punto aparecerán en la vista algebraica. Además, el punto se podrá desplazar sobre la función de manera manual o automática, activando en este caso la Animación automática, para recorrerla.

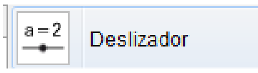


FUNCIONES ELEMENTALES

Comencemos estudiando las rectas, variando la pendiente y la ordenada en el origen.

Para ello introducimos dos deslizadores a y b seleccionándolos y pinchando el lugar de la ventana gráfica donde deseamos colocarlos, y tomamos los valores que nos dan por defecto, entre -5 y 5 y con un incremento de 0.1





Escribimos en la barra de entrada la función ax+b, y por defecto aparecerá en pantalla la recta f(x)=x+1. Al variar los deslizadores a y b se podrán ver las variaciones de las pendientes (cuando se mueve a) y de las ordenadas en el origen (cuando se mueve b)

Actividad 7

Define tres deslizadores, a, b y c y define la función $f(x)=ax^2+bx+c$. Al mover los deslizadores veremos las variaciones de curvatura, posiciones del vértice y ordenada en el origen de las funciones parabólicas.

¿Qué movimiento hace la parábola cuando variamos el coeficiente b?

Define la recta x= -b/2a, que intersecada con la parábola se obtiene el vértice, activa el rastro de ese vértice que llamaremos V y observa lo que ocurre cuando varía el coeficiente b.

De igual manera se pueden definir polinomios de grado superior a dos y estudiar sus variaciones cuando cambian los coeficientes del polinomio

Los deslizadores son muy útiles para variar no solo coeficientes de las funciones polinómicas, sino cualquier otro elemento de las construcciones con GeoGebra.

Actividad 8

Define un deslizador para representar las funciones $f(x)=x^n$ para n=1,2…6

Otras funciones elementales:

Para representar funciones irracionales se utiliza la expresión “sqrt(x)” para la raíz cuadrada y la expresión “raizn[x,n]” para la raíz n-ésima

Para funciones racionales será suficiente definir la fracción, escribiendo entre paréntesis numerador y denominador

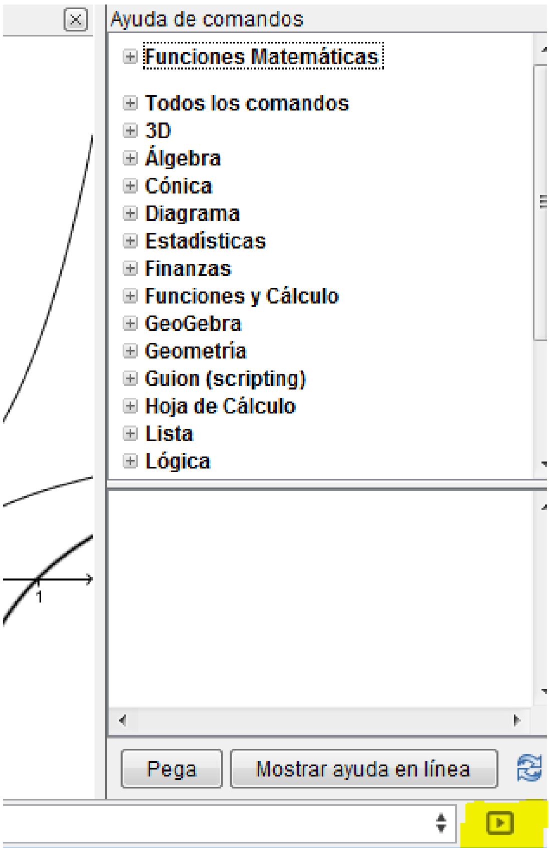
Para funciones trigonométricas sen(x); cos(x), tg(x), sec(x), cosec(x) y cotg(x)

Las funciones exponenciales se escriben: exp(x) ó e^x para la función exponencial de base el número e, y ln(x) ó log(x) para la función logartimto neperiano.

Para funciones exponenciales de base a escribiremos directamente a^x, y para logaritmos en base a escribiremos log(a,x).

La función valor absoluto de una función se expresa en la barra de entrada escribiendo abs(f), habiéndose definido previamente la función f, o directamente escribiendo abs(“función”)

GeoGebra ofrece un menú con todos estos comandos y otros muchos para funciones, pinchando en la parte inferior derecha la pestaña, donde aparecerá una ayuda de comandos, que están clasificados por bloques, siendo el primero de ellos el de las funciones matemáticas



Actividad 9

Representa las siguientes funciones

$f_1(x) = \sqrt{x^2 - x}$ $f_2(x) = \log_3(2-3x)$ $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$ $f_4(x) = e^{x^2-4}$ $f_5(x)=|3 \text{ sen } x|$

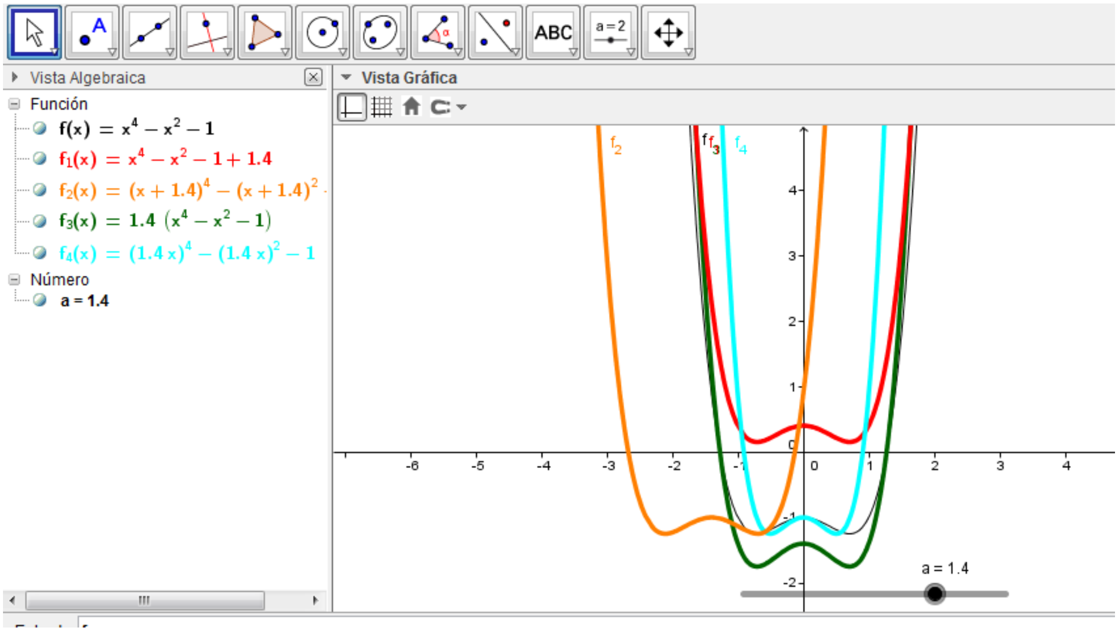
Transformaciones gráficas de funciones.

Para visualizar gráficamente las transformaciones de las gráficas vamos a definir un deslizador a entre los valores -3 y 3 con un incremento de 0.05.

Escribimos la función f(x)= x^4-x^2-1 y la mantenemos en pantalla. Sobre ella definimos una a una las siguientes funciones:

$f_1(x)$=f(x)+a; $f_2(x)$=f(x+a); $f_3(x)$=af(x); y $f_4(x)$=f(ax)

Vamos ocultando las diferentes funciones y dejando aquella que queremos estudiar.



FUNCIONES A TROZOS

Para representar una función definida por intervalos utilizaremos el comando condicional Si, cuya sintaxis es: Si[condición, acción]. En este caso realiza la acción indicada si la condición es verdadera.

Cuando escribimos: Si[condición, acción1, acción2] realizará la acción1 cuando la condición es verdadera y en caso contrario, ejecutará la acción2.

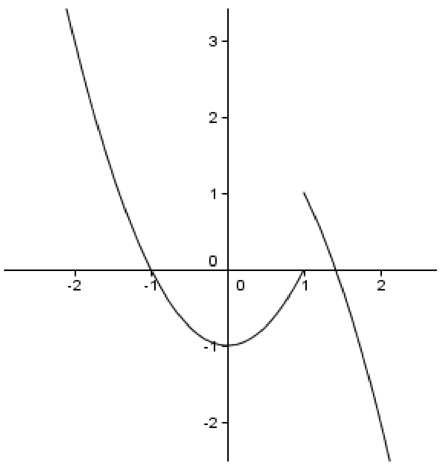
Por ejemplo, para representar la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<1 \\ -x^2+2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Escribiremos en la línea de entrada la expresión:

Si[x<1,x^2-1,-x^2+2]

Obteniendo la gráfica que aparece en la imagen siguiente:

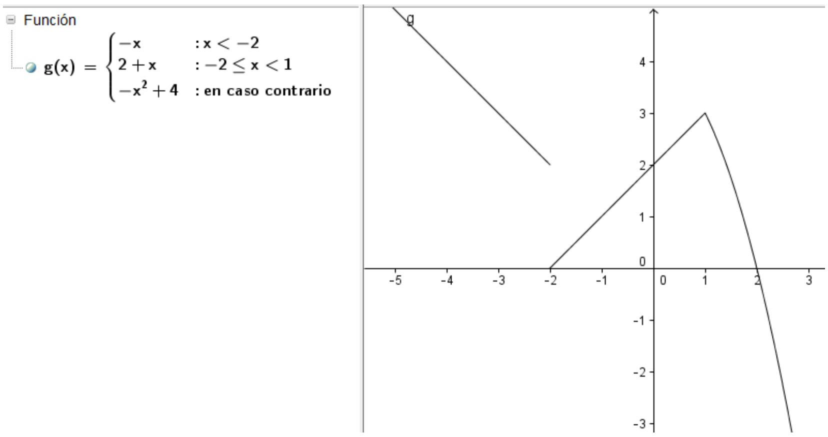


Cuando existan más de dos intervalos será necesario anidar los comandos **Si** para definir la función.

Por ejemplo, para representar la función $g(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<-2 \\ 2+x & si \quad -2\le x<1 \\ -x^2+4 & si \quad 1\le x \end{cases}$ escribiremos:

Si[x<-2,-x,Si[x<1,2+x,-x²+4]]

Obteniendo la representación que aparece en la imagen siguiente:



Actividad 10

Representa las siguientes funciones definidas a trozos

$$f_1(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & 0<x<1 \\ ln\ x & 1\le x \end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} sen\ x & -2\pi<x\le -\pi \\ cos\ 2x & -\pi<x<\pi \\ tg\ x & \pi\le x<2\pi \end{cases}$$

Estudio de una función

Para determinar los puntos característicos de una función también disponemos de algunos comandos, que se podrán utilizar de manera directa sobre funciones polinómicas o estableciendo un intervalo de búsqueda para otras funciones.

Raíces de una función

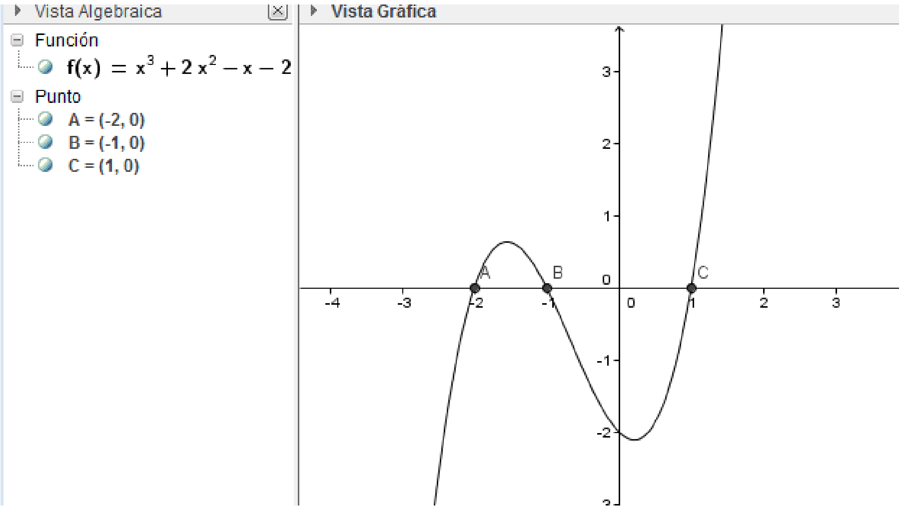
El comando función Raíz devuelve y representa los puntos correspondientes a las raíces de una función. Este comando admite distintos argumentos que relacionamos a continuación:

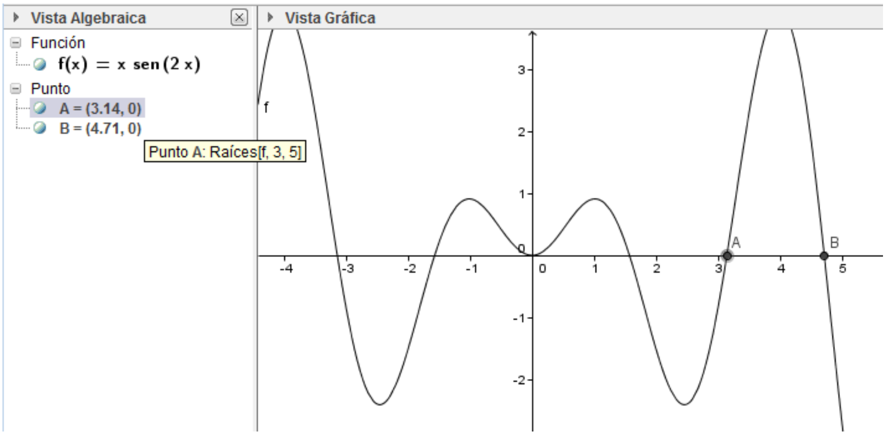
Raíz[p(x)]: devuelve las raíces de una función polinómica.

Raíz[f(x), x_0]: obtiene una raíz de la función f(x) aplicando el método de Newton tomando como valor inicial x_0.

Raíz[f(x), x_1, x_2]: obtiene una raíz de la función f(x) en el intervalo [x_1, x_2] aplicando el método de regula falsi.

Raíces[f(x), x_1, x_2] obtiene las raíces de la función cuando son mas de una raíz la que se encuentra en el intervalo [x_1, x_2]





Observamos que el comando Raíz devuelve todas las raíces del polinomio, mientras que la segunda función solo devolverá las raíces encontradas en el intervalo indicado.

Actividad 11

Encontrar las raíces de las siguientes funciones

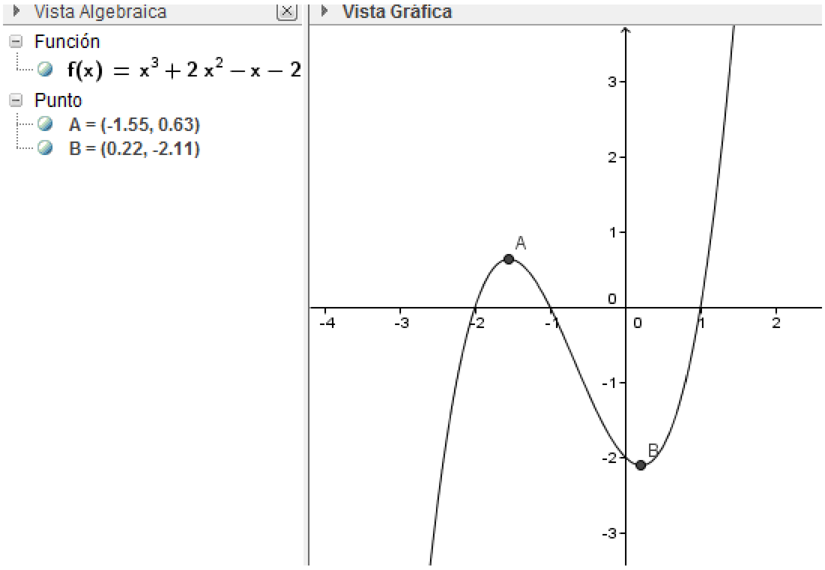
$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot cos\ 3x \qquad \text{en el intervalo }]-\pi, \pi[$$

$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^4}$$

$$f(x) = (x+1)e^{1/x}$$

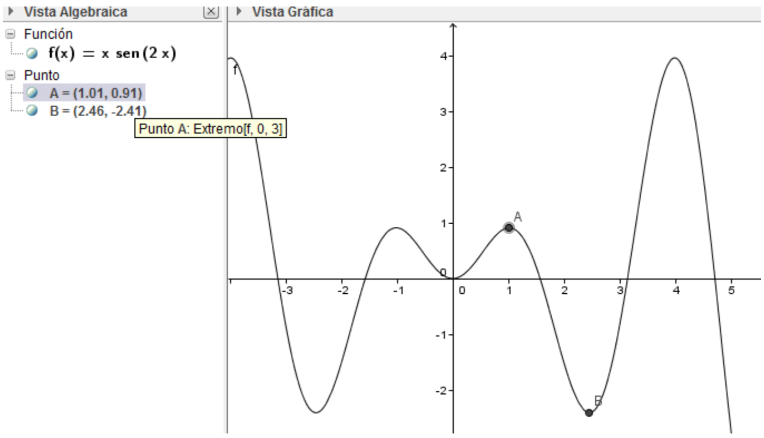
Extremos de una función

Utilizando Extremo se obtendrán y se representarán los puntos correspondientes a los extremos relativos de una función polinómica.



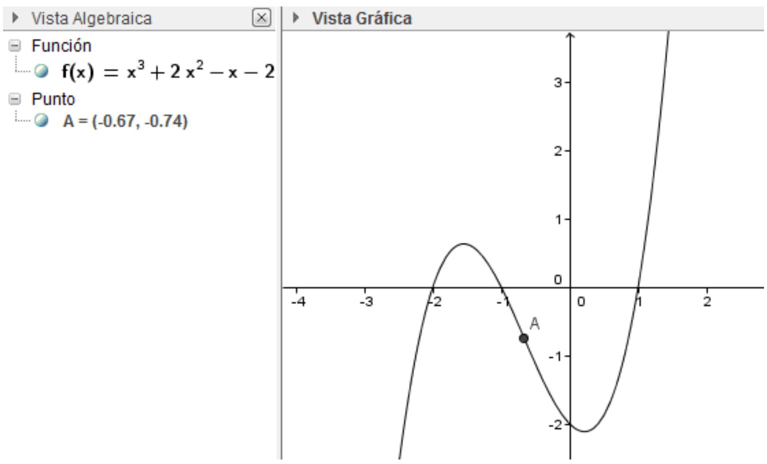
De manara análoga, con Extremo se obtendrán los máximos y mínimos de una función no polinómica en el intervalo indicado. En este caso, la sintaxis será:

Extremo[f(x), x_1, x_2]



Punto de inflexión de una función

A través del comando PuntoInflexión[p(x)] obtendremos las coordenadas de los puntos de inflexión de la función polinómica p(x), que además aparecerán representados en la ventana gráfica.



Este comando no está disponible para funciones no polinómicas, aunque podemos obtener su valor ya que los puntos de inflexión de una función serán los extremos de su derivada, por lo que bastará con obtener la primera derivada. Y encontrar los extremos de la misma.

Actividad 12

Encontrar extremos y puntos de inflexión de las siguientes funciones´

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

ESTUDIO DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES CON PARÁMETROS

Para estudiar la continuidad de una función a trozos, definida mediante parámetros vamos a usar los deslizadores.

¿Qué valor que debe tomar k para que la función f sea continua en el punto $x_0=1$?

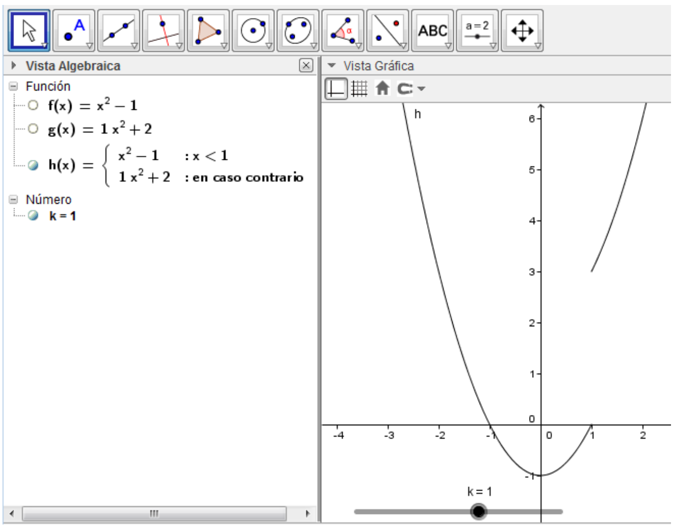
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < 1 \\ kx^2 + 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Comenzaremos definiendo un deslizador k, con los valores e incremento que se nos dan por defecto, entre -5 y 5 y con incremento de 0.1.

A continuación definimos la función x^2-1 y la función kx^2+2, que son las que intervienen en los trozos de nuestra función, y las ocultamos.

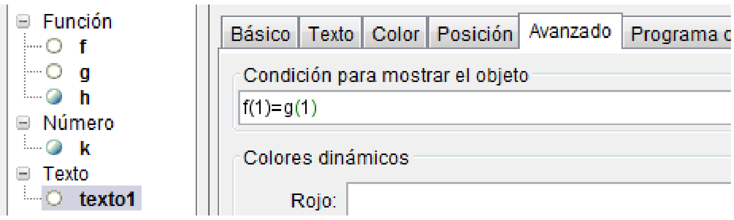
Luego definimos la función a trozos.

Al mover los deslizadores podremos encontrar el valor de k, que nos hacen que las funciones sean continuas en el punto 1

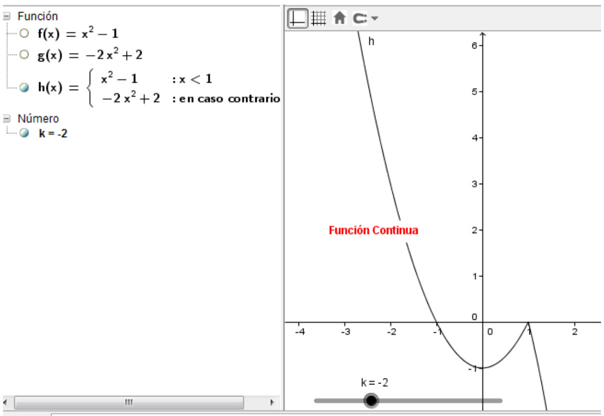


Si deseamos que aparezca un texto en el que se nos diga que la función sea continua cuando encontremos ese valor k, procederemos de la siguiente manera.

Seleccionamos la herramienta Texto, y pinchamos en la zona de la ventana gráfica donde deseemos que aparezca. Una vez escrito entramos en propiedades y en la pestaña Avanzado escribiremos en las condiciones para mostrar objeto: f(1)=g(1)



Esto hará que nuestro texto de "Función Continua" aparezca solamente cuando la función lo sea



Actividad 13

Estudiar para qué valores a y b, la función f(x) es continua y con derivada continua en todo su dominio. (Para hallar la derivada de una función bastará escribir en la barra de entrada Derivada[f]**)** Escribe el texto "Continua y Derivable" y haga que aparezca en pantalla cuanto tengamos la solución.

$$f(x)=\begin{cases} bx+2 & si \quad x<0 \\ a\cdot\cos x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Actividades Finales

1. Representar las funciones siguientes:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2} \qquad g(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad h(x)=x\,sen(x).$$

2. Representa la función siguiente definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & si & x<-1 \\ x^2-2 & si & -1\leq x<1 \\ 2-x & si & 1\leq x \end{cases}$$

3. Estudiar la función: $y=x^5-4x^3+2x$

4. Estudia continuidad y derivabilidad de la siguiente función definida a trozos en función de los parámetros a y b

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-x & x<0 \\ -ax+b & x\geq 0 \end{cases}$$