Una ruta-yincana matemática por la Universidad de Alicante

María Dolores Molina; Julio Mulero; Lorena Segura; Juan Matías Sepulcre; Melania Guillén

email: mariola.molina@ua.es; julio.mulero@ua.es; lorena.segura@ua.es; jm.sepulcre@ua.es; mgs70@alu.ua.es

Facultad de Ciencias; Universidad de Alicante

RESUMEN

En el presente trabajo describimos una ruta matemática enfocada para alumnos universitarios tomando como marco de referencia el campus de la Universidad de Alicante, que abarca alrededor de un millón de metros cuadrados y está ubicado en la localidad de San Vicente del Raspeig (Alicante). La actividad ha sido diseñada a partir del reconocimiento de elementos de índole matemática presentes en el campus y de la elaboración de actividades relacionadas con ellos y con cada una de las cuatro ramas principales de las Matemáticas.

Matemáticas, divulgación, ruta matemática, yincana matemática

Introducción

Las Matemáticas es la ciencia que estudia, describe y analiza las cantidades, el espacio, las formas, los cambios y las relaciones, así como la incertidumbre. Las matemáticas son, en el fondo, una exploración de las diversas estructuras complejas del universo. El análisis de estas estructuras no ha sido en general un mero ejercicio especulativo o académico, sino un ejercicio práctico en el que se ha buscado a conciencia la utilidad y el progreso de la sociedad, una sociedad que en ocasiones se siente incómoda cuando se habla de ellas y que, incluso, prefiere ignorar su presencia en cada uno de sus elementos.

Las Matemáticas se presentan, a menudo, como una ciencia abstracta alejada de la vida cotidiana. Sin embargo, esta disciplina está presente en nuestro alrededor de manera palpable. Desde nuestra experiencia, la ciencia matemática despierta un mayor interés en los individuos a partir del contacto y la experimentación con la realidad que nos rodea.

Como docentes, consideramos imprescindible motivar el aprendizaje de las Matemáticas por medio de actividades participativas de índole matemático que permitan una comprensión más profunda del medio en el que vivimos y, al mismo tiempo, transmitan de forma más directa que las Matemáticas son una herramienta imprescindible en nuestra vida diaria.

El campus de la Universidad de Alicante (UA), ubicado en la localidad de San Vicente del Raspeig y con una extensión de alrededor de un millón de metros cuadrados, reúne una serie de características que hacen de él uno de los mejores de Europa. La ubicación y distribución de los diferentes edificios, en un espacio donde las abundantes zonas verdes ajardinadas cobran un especial protagonismo, llama la atención del visitante, ofreciendo una perspectiva abierta acorde a la actividad docente e investigadora realizada en el interior de los diferentes edificios que lo conforman. Además, basta un pequeño paseo para percibir el equilibrio y la proporcionalidad con las que han sido diseñados los lugares que encontramos a nuestro paso.

Desde un punto de vista científico, podemos distinguir en el campus muchos elementos de marcado carácter matemático [7] que son el origen de este trabajo y que han inspirado el diseño de diferentes actividades que pueden servir para conformar una ruta o paseo matemático.

Este trabajo se enmarca en el contexto de una red de divulgación de las matemáticas, llamada DIMATES, cuyos componentes hemos iniciado una tarea divulgativa a través de diferentes actividades tales como cursos de verano, conferencias y trabajos de investigación en congresos docentes (tal como se recoge en [3], [4], [5] y [6]). En cuanto a rutas matemáticas, existe una extensa lista de referencias que han sido planificadas en diferentes ciudades (especialmente desde un punto de vista de matemáticas básicas). Por ejemplo, podemos ver las rutas elaboradas en Elche, Valladolid y Zaragoza (ver [2], [8] y [9], respectivamente) y con valoraciones altamente satisfactorias, que han sido planificadas con el objetivo de poner en valor los elementos patrimoniales de los que disponen, a través de las matemáticas. Por otro lado, también existen referencias acerca de la elaboración y el diseño de rutas matemáticas (ver [1]).

Más concretamente, los objetivos de este trabajo son:

1. Poner en valor los elementos de índole matemática presentes en el campus de la Universidad de Alicante.

2. Describir una ruta-yincana matemática atractiva por el campus de la Universidad de Alicante por medio de actividades participativas que familiaricen a los participantes con la presencia de las Matemáticas en la vida diaria.

3. Mostrar algunos ejemplos de actividades que forman parte de dicha ruta-yincana matemática y que sirvan de inspiración para el diseño de otras actividades de este estilo en otros lugares.

Si bien es cierto que un mayor conocimiento del campus, independientemente de la perspectiva, supone una concienciación del valor patrimonial en sí, la consecuencia directa de estas actividades es la puesta en valor de las Matemáticas propiamente dichas.

Las actividades y rutas matemáticas que se proponen en la literatura citada anteriormente requiere, en general, un nivel bajo de conocimientos en Matemáticas que se ve justificada por el hecho de estar enfocadas a un público general. La ruta-yincana matemática que presentamos en este trabajo, fruto de nuestra labor docente y divulgativa en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante, está también dirigida a alumnos universitarios de los grados de ciencias como, por ejemplo, Matemáticas, Física, Química, Biología, Ciencias del Mar, etc.

Elementos matemáticos en el campus de la UA

En una primera fase recorrimos el campus de nuestra universidad detectando aquellos elementos presentes en el recorrido en los que se podía apreciar, de alguna u otra manera, características matemáticas de distinta índole (ver [7]). Una vez obtuvimos todos los elementos, procedimos a clasificarlos en cuatro grandes ramas de las matemáticas. En esta sección, y a modo de ejemplo, mostraremos algunos de los elementos con contenido matemático obtenidos en la fase previa, clasificados en: Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Estadística. En la siguiente sección, adjuntaremos cuatro actividades relacionadas con los primeros ejemplos expuestos.

A) Álgebra

A.1.- Grupos de simetría en el plano en el campus

Cualquier recubrimiento simétrico del plano consiste de una celda básica o patrón que se repite infinitamente. En este proceso solo intervienen cuatro tipos de movimientos: traslaciones, reflexiones, rotaciones (conservando la orientación) y deslizamientos.

Existen sólo 5 grupos de simetría en el plano conservando la orientación. Si el grupo de simetría contiene además reflexiones y simetrías con deslizamiento, aparecen doce nuevos grupos. Hay tres posibles formas de recubrir el plano de forma simétrica: mosaicos, frisos y rosetones.

Figura 1. Pavimento del Campus

Visitando el campus de la universidad es posible constatar que en cualquier embaldosado, pared recubierta por azulejos o por “pavés” de cristal, tenemos un recubrimiento simétrico del plano. Incluso un enladrillado en el esqueleto de un edificio o en su fachada es un recubrimiento simétrico del plano.

A.2.- Técnicas de Escher en el Aulario I

El Aulario I está repleto de obras artísticas que cuelgan de sus paredes. Algunas de ellas nos llaman la atención pues en ellas el artífice utiliza la idea de la cual el artista-matemático Escher hizo también uso en alguna de sus creaciones.

Figura 2. Reptiles. Obra de Escher

Figura 3. Cuadro Aulario I

Se trata de jugar al mismo tiempo con el espacio tridimensional y bidimensional que en este cuadro del Aulario I resulta evidente (ver Figura 3). Escher consiguió que las teselaciones sobre el plano fueran cobrando vida, ganando una tercera dimensión y desplazándose a lo largo de la obra. Esta técnica es la que nos recuerda el cuadro del Aulario I.

B) Análisis Matemático

B.1.- La catenaria de la Politécnica.

Figura 4. Catenaria de la Politécnica

Una curva muy común en nuestra vida cotidiana es la que aparece cuando colgamos una cadena o un cable en dos puntos fijos y sólo soporta su propio peso. Aunque Galileo y otros matemáticos posteriores creyeron que se trataba de una parábola, a principios del siglo XVIII los hermanos Bernoulli, que poseían conocimientos de física y matemáticas, determinaron su ecuación y le llamaron catenaria (cadena).

En el campus parece que podemos reconocer esta forma, de manera invertida, en el edificio de la Escuela Politécnica Superior (ver Figura 4). Dado un elemento lineal sometido sólo a cargas verticales, la forma catenaria es precisamente la forma del eje baricéntrico que minimiza las tensiones. Por esa razón, una curva catenaria invertida es un trazado útil para un arco en la arquitectura, forma que fue aplicada con gran maestría por Antonio Gaudí. En la Figura 4 podemos ver el trazo de la curva $y=1000*\cosh(x/1000)$, dibujado con la ayuda de Maple, que representa una catenaria acoplada de forma casi óptima al elemento arquitectónico.

B.2.- Puntos de inflexión en los bancos.

En matemáticas, el estudio de la forma de una función y el hecho de decidir si es cóncava o convexa se llama curvatura y, si la función presenta las suficientes propiedades para poder abordarlo, se hace utilizando la segunda derivada de la función. El perfil de un banco nos puede servir como excusa para tratar este tema. En la Figura 5 podemos apreciar claramente dos puntos de inflexión, es decir, puntos donde hay un cambio en la curvatura: de convexa a cóncava o viceversa. Así, una función es convexa si su epigrafo (el conjunto de puntos situados en o sobre el grafo de la función) es un conjunto convexo (el segmento que une cada par de puntos del conjunto está totalmente incluido en el propio conjunto), y una función cóncava es lo opuesto de una función convexa.

Figura 5. Bancos en el campus UA

C) Geometría

C.1.- Espiral en el Aulario I

Figura 6. Escultura espiral Aulario I

Los términos "espiral" y "hélice" se confunden fácilmente. Una espiral común es una curva, que suele ser plana, que se inicia en un punto central y se va alejando del centro a la vez que gira alrededor de él. Una hélice, en cambio, siempre es tridimensional: es una línea curva continua, con pendiente finita y no nula, que gira alrededor de un cilindro, un cono o una esfera, avanzando en las tres dimensiones.

Las espirales están presentes en el diseño de la naturaleza, desde algo tan pequeño como la molécula del ADN, o tan grande como una galaxia. Tenemos varios tipos de espirales conocidas como la espiral de Arquímedes (la del Aulario I podría responder a este tipo, ver Figura 6), de Fermat, de Fibonacci, hiperbólica o logarítmica.

C.2.- Geometría euclidiana, en general, de los edificios y jardines del campus

Figura 7. Jardines

En el mapa de la UA se pueden observar claramente las diferentes figuras geométricas que conforman las plantas de los edificios. Una característica común de muchos de los edificios es su estructura de líneas rectas compuesta por la superposición de figuras geométricas. En particular, casi todos se pueden obtener a partir de circunferencias y rectángulos. Por otro lado, basta observar la Figura 7 donde aparecen los jardines del campus para detectar estas formas.

D) Estadística

D.1.- La ley de Benford

La ley de Benford es una sorprendente teoría matemática que predice que en un conjunto de números (con unas características determinadas), aquellos cuyo primer dígito es, por ejemplo, 1 no aparecen con la misma frecuencia que los números que empiezan por otros dígitos. De hecho, las frecuencias van disminuyendo conforme aumenta el primer dígito. En particular, las frecuencias de los primeros dígitos deben responder a la siguiente tabla de frecuencias:

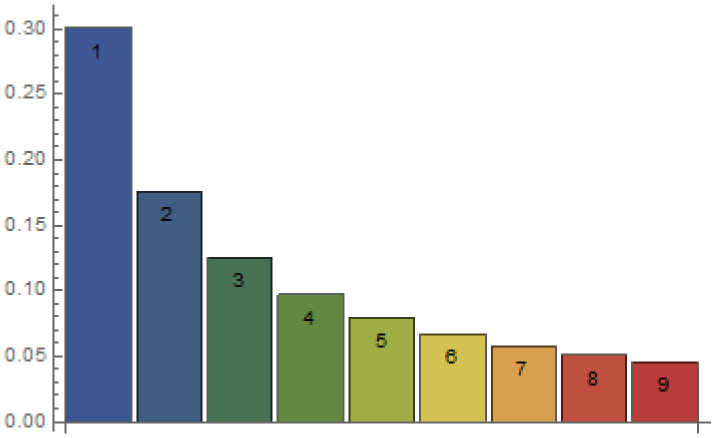


Figura 8. Diagrama de barras según la ley de Benford.

Esta ley se satisface en conjuntos de datos en los que aparecen valores de diferente naturaleza como, por ejemplo, en los datos de un periódico (también presentes en el campus). Sin embargo, hay también conjuntos de datos, como los números de teléfono o las matrículas de los coches, que no pueden responder a este esquema.

D.2.- La distribución normal

La Estadística está presente en todos los aspectos sociales que se dan lugar en el campus, así como en todos los ámbitos de la sociedad. En este sentido, es posible ilustrar las diferentes distribuciones conocidas simplemente proponiendo pequeñas encuestas a realizar entre los "habitantes" del campus. Particularmente, la distribución normal es una de las distribuciones que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales y, de hecho, su importancia radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada (la campana de Gauss):

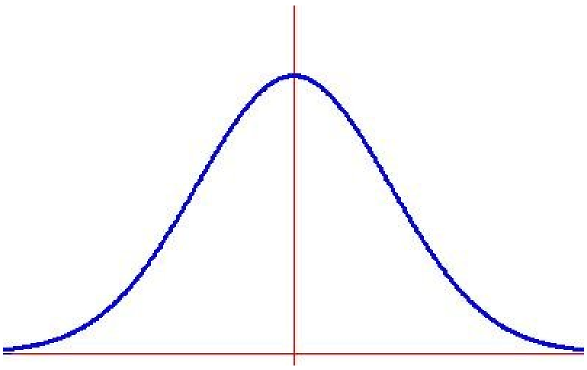


Figura 9. La campana de Gauss.

Una ruta matemática por el campus de la UA

Planteamiento

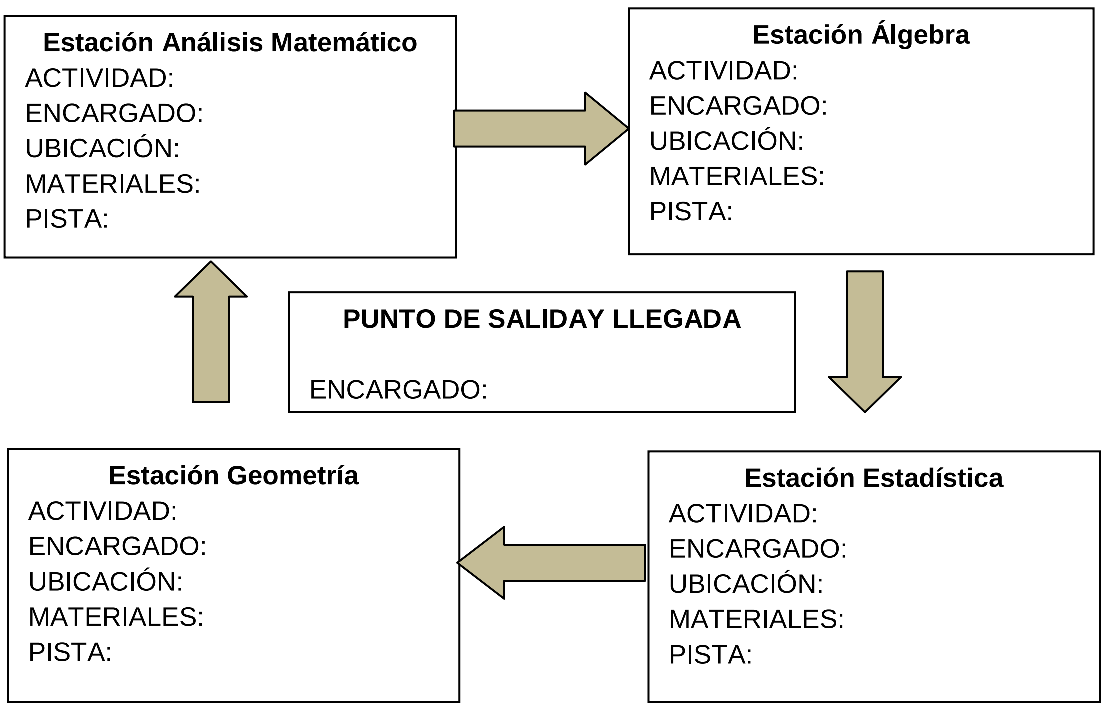
La actividad está diseñada para estudiantes de los diferentes grados de la rama de Ciencias. En este sentido, se pretende que se formen grupos entre los participantes y que hagan un recorrido-yincana dividido en cuatro estaciones relacionadas con las distintas ramas de las matemáticas: Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Estadística. La organización está planteada del siguiente modo:

- En la salida-llegada de esta actividad tipo yincana se sitúa un profesor para dar las directrices generales de la actividad.

- Además, en cada estación está situado un profesor que entregará a cada grupo el dossier con una breve explicación de los contenidos matemáticos que aparecen en los elementos propios del punto del campus en el que nos encontramos, junto con un conjunto de actividades a resolver por los componentes del grupo.

- Una vez resueltas las actividades, el profesor evalúa el trabajo del grupo y asigna una calificación. Para poder acceder a la siguiente estación, el profesor encargado les facilitará una pista con la que los alumnos tendrán que obtener un código que les dará acceso al siguiente punto.

El esquema del diseño de la actividad es el siguiente:



Las actividades

A continuación, en relación con los primeros elementos expuestos en la sección anterior, mostramos ejemplos de actividad de cada una de las cuatro ramas. En concreto, exponemos explícitamente los documentos que son entregados a los participantes y también su descripción técnica (únicamente utilizados por el profesor).

Estación Álgebra

MARZO 2015, Nº 1

Matemáticas por el campus

Estación Álgebra

El álgebra al área matemática que se centra en las relaciones, estructuras y cantidades, y a diferencia de la aritmética, utiliza los símbolos para definir las operaciones aritméticas elementales, sus propiedades y formular leyes generales, permitiendo el desarrollo de ecuaciones y desarrollo del análisis correspondiente a su resolución.

Las teselaciones

Una teselación (o mosaics) es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana, de forma que no queden huecos entre ellas y no se superpongan. Las antiguas civilizaciones decoraron sus templos mediante mosaicos formados a partir de iteraciones de patrones matemáticos se originaron las teselas romanas (tesellae era el nombre que daban en la Antigua Roma a sus construcciones). Los musulmanes fueron capaces de profundizar y desarrollar sus propios teselados, por ejemplo en la Alhambra de Granada, añadiendo conceptos como el de isometría de una figura, que consiste en transformarla de modo que no cambie ni la forma ni el tamaño de la figura. Mediante combinaciones de las cuatro isometrías básicas (reflexión, rotación y traslación) se formarán los llamados grupos cristalográficos planos o grupos de simetría con los que se puede rellenar el plano. No fue hasta cinco siglos después, en 1891 y a raíz de la aparición de los rayos X, cuando el cristalógrafo Fedorov observó que estos grupos corresponden a la estructura de los cristales demostrando, que sólo existen diecisiete posibilidades. No deja de ser curioso, que todas y cada una de estas estuvieran presentes en la Alhambra de Granada, cuando a priori, los artesanos musulmanes, no disponían de los conocimientos técnicos suficientes para conocer este detalle.

Según los polígonos que forman el teselado podemos establecer la siguiente clasificación:

1. Teselaciones regulares Emplean un solo tipo de polígonos regulares (lados y ángulos miden todos igual) para rellenar el plano. Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos en cada vértice debe sumar 360º, los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono.
2. Teselaciones semi-regulares Formadas mediante dos o más polígonos regulares, de modo que se siga el mismo patrón en todos y cada uno de los vértices. Tan sólo ocho combinaciones cumplen con las condiciones necesarias de las teselaciones. Además, se les proporciona una numerología en función del número de polígonos de cada tipo que intervienen.
3. Teselaciones no regulares Formadas por polígonos no regulares, creadas a partir de modificaciones de polígonos regulares. No existe un número concreto de creaciones de este tipo y el mérito radica en la imaginación, agilidad y destreza del que se aventure a intentar confeccionarlas. Con cualquier cuadrilátero, ya sea cóncavo o convexo, es posible cubrir una superficie plana.

Este progreso desembocó en las creaciones del artista Maurits Cornelis Escher que añadió los conceptos de metamorfosis y ciclos a las teselaciones. Escher estudió profundamente las maneras en que se podía cubrir una superficie plana mediante la técnica de las teselaciones. Recortando polígonos regulares y aplicando sobre ellos transformaciones isométricas, obtuvo un grandísimo número de bocetos, los cuales le servirían para completar algunas de sus obras más famosas. Escher se centró en la teselación de la superficie con metamorfosis y ciclos y sigue siendo pionero en esta técnica.También es posible teselar el plano en forma artística con figuras que representan seres vivos.

✉ mariola.molina@ua.es julio.mulero@ua.es lorena.segura@ua.es jm.sepulcre@ua.es mgs70@alu.ua.es

MARZO 2015, Nº 1

Ahora te toca a ti

Actividad 1: Clasificando teselaciones

*(2p)*Es fácil observar que vivimos rodeados de teselaciones: embaldosado de aceras, pavimentos, fachadas, azulejos de baños y cocinas. En el texto de la actividad hemos descrito los tipos de teselaciones, ¡vamos a poner en práctica lo aprendido! Clasifica las teselacion que aparece en la siguiente imágen.Después localiza un embaldosado del campus y clasifica la teselación.

Actividad 2: Trabajando con isometrías

*(2p)*Diseña un patrón geométrico y aplícale dos de las isometrias con las que podemos construir las teselaciones.

Actividad 3: Construyendo nuestra propia teselación

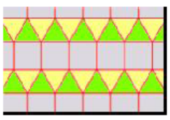
*(2p)*Podemos utilizar la técnica de los artesanos musulmanes para construir una teselación no regular. Elige un polígono regular y modifícalo para construir tu propia teselación. Recuerda que una vez construído tu patrón puedes utilizar rotación, traslación o reflexión para teselar el plano.

Actividad 4: Trabajos de Escher

*(1p)*El artista holandés M.C.Escher se centró en la teselación de la superficie con metamorfosis y ciclos, así como la compenetración de mundos y dimensiones. Recorriendo el campus nos encontramos con algunas obras de arte decorando las paredes interiores de los edificios. ¿Este cuadro que encontramos en el Aulario I te sugiere alguna de las técnicas usadas por Escher?¿cuál de ellas?

Actividad final: Numerando teselaciones semiregulares

*(3p)*Llega el momento de terminar la actividad de esta estación. Tenemos que conseguir la clave numérica que nos permita pasar a la siguiente estación. Para darle un nombre a una teselación semi-regular, da la vuelta a un vértice y escribe cuántos lados tiene cada polígono en orden. Empieza siempre por el polígono que tenga el mínimo número de lados situado más a la izquierda en el giro, y continúa con los polígonos que comparten este vértice girando en el sentido contrario al de las agujas del reloj. ¿Ponemos esto en práctica? Fíjate en la siguiente teselación y nómbrala, ésta te dará la llave para acceder a la siguiente estación.



✉ mariola.molina@ua.es julio.mulero@ua.es lorena.segura@ua.es jm.sepulcre@ua.es mgs70@alu.ua.es

Descripción de la actividad (que no se entrega a los participantes)

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	Teselaciones
ÁREA	Álgebra
CONTENIDOS	Isometrías. Grupos de simetría en el plano. Tipos de Teselaciones.
NIVEL	A partir de ESO y BACHILLERATO
ACTIVIDADES	1. Clasificando teselaciones 2. Trabajando con isometrías 3. Construyendo nuestra propia teselación 4. Trabajos de Escher 5. Numerando teselaciones semiregulares
MATERIALES	Ningún material extra
POSIBLES UBICACIONES	Cualquier acera del campus
OBSERVACIONES	Las actividades no necesitan material alguno
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES	• Actividad 1: Teselación semiregular. En el campus hay muchas regulares • Actividad 2: Tomar un triángulo deformado y aplicamos rotación y traslación. • Actividad 3: Tomar un cuadrado y deformarlo para formar por ejemplo el hueso nazarí. • Actividad 4: Si. Paso de la segunda a la tercera dimensión como en el cuadro de los reptiles. • Actividad final: 34433

MARZO 2015, Nº 1

Matemáticas por el campus

Estación Análisis Matemático

El Análisis Matemático es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números reales y complejos, así como todas las estructuras que se derivan. También constituye objeto de estudio las funciones entre éstos conjuntos de números y las estructuras derivadas. El Análisis Matemático surge como consecuencia de formulación rigurosa del cálculo. Algunos de los conceptos que se estudian son la continuidad, la integración y la diferenciabilidad.

La curva Catenaria

La Catenaria o curva funicular, tiene la forma de una cadena absolutamente flexible suspendida por sus extremos cuando se somete a la acción cuando se somete a la acción de la gravedad. O lo que es lo mismo, cuando un cable o cadena es suspendido por sus extremos y sometido a una fuerza gravitacional uniforme, adquiere por su propio peso la forma de una catenaria.

Las catenarias tienen numerosas aplicaciones en la física y la construcción. Una vela rectangular de un velero atada a dos barras horizontales hinchada por el viento perpendicular a las barras tiene forma de catenaria. Los soportes de las catenarias ferroviarias tienen un perfil intermedio entre la parábola y la catenaria ya que por su propio peso no puede ser suspendida. Los arcos al revés de la construcción de techumbres de edificios de Gaudi, son catenarias. El nombre de catenaria evoca el antiguo nombre de cadeneta, catena en latín. Galileo Galilei (1564-1642) la había estudiado antes, como caso particular de un hilo flexible y homogéneo, suspendido por sus dos extremos y colocado en un campo de gravitación uniforme. Galileo pensó que se trataba de un arco de parábola. Jungius en 1669 aportó una prueba contraria a la tesis de Galileo. Su ecuación correcta fue obtenida por Gottfried Wilhelm Leibniz, Christiaan Huygens (a los 17 años) y Johann Bernoulli en 1691, demostrando con ello que no estaba acertado Galileo. Esta curva es trascendente, continua e ilimitada, simétrica con respecto al eje de las zz que tiene como base al eje de las "x". El punto (a,0) es el vértice. Cerca de los dos extremos de suspensión, la catenaria es casi una curva vertical; la inclinación disminuye en la medida que nos acercamos al punto más bajo de la curva. Éstas son diferencias, a simple vista, entre la catenaria y las parábolas. De forma más específica distinguiermos claramente la diferencia entre la catenaria y la parábola. La parábola (sección de un cono de revolución) tiene la siguiente ecuación matemática: $y = ax^2 + bx + c$, mientras que la ecuación de la curva catenaria es $y = acosh(x/a)$, siendo $a > 0$, una constante que depende del peso y la tensión horizontal. El coseno hiperbólico se puede desarrollar según Taylor como $1 + \frac{x^2}{2}+$un término de cuarto orden y ese es el término que diferencia ambas curvas. Este es un ejemplo de lo más ilustrativo de cómo la matemática (parábola) "intenta" imitar a la naturaleza (catenaria). En esta ocasión casi lo logra. Gaudí, amante de la naturaleza, utiliza las catenarias invertidas (arco catenario), en lugar de parábolas para dar una estética más natural a sus creaciones así como una mayor estabilidad a sus construcciones.

mariola.molina@ua.es julio.mulero@ua.es lorena.segura@ua.es jm.sepulcre@ua.es mgs70@alu.ua.es

MARZO 2015, Nº 1

Ahora te toca a ti

Actividad 1: Descubriendo la función cosh x

(1p) Ya hemos dado la ecuación explícita de la curva catenaria, pero podemos transformar esta expresión usando únicamente exponenciales. Sabiendo que el

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

escribe la ecuación de la curva catenaria usando sólo funciones exponenciales.

Actividad 2: Derivando

(1p) Ahora que hemos escrito la ecuación de la catenaria usando exponenciales, calcula la expresión de la derivada de esta función

Actividad 3: Utilizando aproximaciones de funciones. Desarrollo de Maclaurin

(3p) En el texto hemos establecido la diferencia entre la parábola y la catenaria usando el desarrollo de Taylor. Recuerda que el Teorema de Taylor afirma que si f(x) es una función continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta el orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que la derivada de orden n+1 existe en (a,b), entonces para x y $x_0 \in (a, b)$ se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0}{2!})(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

donde $E_n = \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1!)}(x - x_0)^(n + 1)$ y c es un punto que se encuentra entre x y xo. Si se toma $x_0 = 0$ obtenemos el desarrollo de Maclaurin. Calcula el desarrollo de Maclaurin para la función exponencial hasta el orden n.

Actividad 4: Secciones cónicas

(4p) Una superficie cónica de revolución está engendrada por la rotación de una recta alrededor de otra recta fija, llamada eje, a la que corta de modo oblicuo.

Indica cómo debe ser el ángulo de la sección del cono de revolución respecto al ángulo que forma el eje del cono con la generatriz del mismo para obtener: el círculo, la hipérbola, la parábola y la elipse.

Actividad final: ¿Arco catenario en la Politécnica?

(1p) Posiblemente el arco de la Politécnica sea un arco catenario dado su carácter estable. Para abandonar esta estación calcula la pendiente de la recta tangente a la curva catenaria en el punto x=5.

mariola.molina@ua.es julio.mulero@ua.es lorena.segura@ua.es jm.sepulcre@ua.es mgs70@alu.ua.es

Descripción de la actividad

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	La Curva Catenaria
ÁREA	Análisis Matemático
CONTENIDOS	Propiedades básicas del círculo, circunferencia y corona circular. Problema isoperimétrico clásico.
NIVEL	A partir de ESO y BACHILLERATO
ACTIVIDADES	1. Descubriendo la función cosh x 2. Derivando 3. Utilizando aproximaciones de funciones. Desarrollo de Maclaurin. 4. Secciones cónicas. 5. Actividad final ¿Arco catenario en la Politécnica?
MATERIALES	Ninguno en especial
POSIBLES UBICACIONES	Arco de la Politécnica
OBSERVACIONES	Las actividades no necesitan ningún material complementario.
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES	• Actividad 1: $y= a(e^{x/a} +e^{-x/a})/2$ • Actividad 2: $y'=\text{senh}(x/a)= (e^{x/a} - e^{-x/a})/2$ • Actividad 3: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \; (\forall x \in R)$ • Actividad 4: Cortamos una superficie cónica por un plano que no pase por su vértice y llamamos α al ángulo que forma el eje del cono con la generatriz del mismo y, llamamos β al ángulo que forma el plano con el eje del cono. Según la relación entre estos ángulos, ambas superficies se cortarán en: una circunferencia si β = 90º, una elipse si α < β < 90º, una parábola si α = β, las dos ramas de una hipérbola si α > β. • Actividad final: (Se queda en función de a) Pendiente $=(e^{5/a} - e^{-5/a})/2$

Estación Geometría

Matemáticas por el campus

Estación Geometría

La geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. Se trata de una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo puntos, rectas, planos, curvas, superficies, polígonos, etc y que presenta aplicaciones importantes en la naturaleza y vida cotidiana.

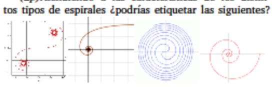
Las espirales y hélices en el Campus

Existen espirales y hélices en el arte, en la arquitectura, en la gastronomía, en la tecnología, en la naturaleza... ¡y hasta en la sopa! Hace unos 4.500 millones de años que la Tierra nació a partir del movimiento en espiral de una nube de gas y polvo.En la naturaleza existen hélices y espirales desde hace millones y millones de años. Unas veces como solución para el crecimiento (conchas en espiral), otras para aumentar la efectividad de las armas (garras, cuernos, colmillos) u otras simplemente para ocupar el mínimo espacio posible (espiritrompa de mariposas,virus enrollamientos de serpientes). Los términos espiral y hélice se confunden fácilmente. Una espiral común es una curva, que suele ser plana, que se inicia en un punto central y se va alejando del centro a la vez que gira alrededor de él. Una hélice, en cambio, siempre es tridimensional: es una línea curva continua, con pendiente finita y no nula, que gira alrededor de un cilindro, un cono o una esfera, avanzando en las tres dimensiones.Podemos observar hélices en la trayectoria de las ardillas que habitan el campus, al subir a un árbol. La espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante, y se emplean por ejemplo en bombas de compresión o compresores rotativos para comprimir líquidos y gases y tiene por ecuación $r = a + b\theta$ con a y b números reales. La espiral de Fermat o parabólica, tiene por ecuación $r = \pm\theta^{\frac{1}{2}}$. La espiral hiperbólica o recíproca, que tiene por ecuación $r = \frac{a}{\theta}$. La espiral lograrímica o de crecimiento, cuya ecuación es $r = ab^{\theta}$. Esta espiral se distingue de la espiral de Arquímedes por el hecho de que las distancias entre su brazos se incrementan en progresión geométrica, mientras que en una espiral de Arquímedes estas distancias son constantes.Es la espiral más frecuente en el reino animal y vegetal. En las margaritas, igual que en la forma en que se distribuyen las hojas de una rosa, hay familias enteras de espirales logarítmicas.La espiral clotoide o de Cornú tiene la propiedad de que su curvatura en cualquier punto es proporcional a la distancia a lo largo de la curva medida desde el origen. Esta propiedad hace que sea útil como curva de transición en el trazado de autopistas o ferrocarriles, puesto que un vehículo que siga dicha curva a velocidad constante tendrá una aceleración angular constante, por lo que es usad en trazados de carreteras y, especialmente, ferroviarios, con el fin de evitar discontinuidades en la aceleración centrípeta de los vehículos.Igualmente las secciones de esta espiral clotoide son usadas comúnmente en montañas rusas por lo que algunas vueltas completas se conocen como loops clotoides.

Ahora te toca a ti

Actividad I: Clasificando espirales

*(2p)*Atendiendo a las características de los distintos tipos de espirales ¿podrías etiquetar las siguientes?



Actividad 2: Espirales en el campus

*(1p)*Atendiendo a las características de las distintas espirales citadas en el texto ¿Podrías clasificar la espiral de la escultura del Aulario I que aparece en la siguiente imagen?

Actividad 3: ¿Por qué espiral logarítmica?

*(2p)*La mayoría de las espirales deben su nombre a aquellos matemáticos que las introdujeron. En cambio la espiral logarítmica no sigue esa pauta ¿a qué crees entonces que debe su nombre?¿cómo puedes relacionar su nombre con los logaritmos?

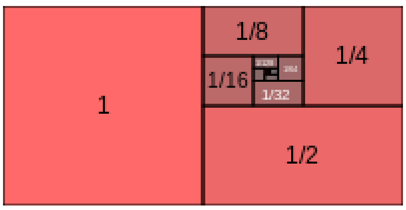
Actividad 4:Trabajando con coordenadas polares

*(3p)*Como has podido comprobar las ecuaciones de las espirales vienen dadas en coordenadas polares. Recuerda que en un sistema de coordenadas polares en el plano se considera el centro de referencia (punto O) y la línea OL sobre la que se miden los ángulos. Para referenciar un punto se indica la distancia al centro de coordenadas y el ángulo sobre el eje OL. Utilizando trigonometría elemental es fácil deducir las fórmulas de conversión de coordenadas polares a cartesianas y viceversa. Deduce las fórmulas de conversión y expresa el punto de coordenas cartesianas (3,2) en coordenas polares. ¿Podrías escribir la ecuación de la circunferencia en polares?

Actividad final:

(2p) espiral logarítmica se distingue de la espiral de Arquímedes por el hecho de que las distancias entre su brazos se incrementan en progresión geométrica, mientras que en una espiral de Arquímedes estas distancias son constantes. Como anécdota el matemático Jakob Bernoulli escogió la figura de la espiral logarítmica (constante en el crecimiento de su radio) como emblema en el epitafio de su tumba, pero la espiral que equivocadamente tallaron los maestros canteros en su tumba fue una espiral de Arquímedes (constante en la diferencia de los radios). Repasemos algunos conceptos de las progresiones geométricas: Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

Descripción de la actividad

<table>
<tr><td>NOMBRE DE LA ACTIVIDAD</td><td>Espirales y hélices</td></tr>
<tr><td>ÁREA</td><td>Geometría</td></tr>
<tr><td>CONTENIDOS</td><td>Diferencia entre espirales y hélices. Tipos de espirales.
Coordenadas polares. Progresiones geométricas</td></tr>
<tr><td>NIVEL</td><td>A partir de ESO y BACHILLERATO</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>1. Clasificando espirales.
2. Espirales en el campus.
3. ¿Por qué espiral logarítmica?
4. Trabajando en coordenadas polares
5. Actividad final: La espiral de Jakob Bernoulli.</td></tr>
<tr><td>MATERIALES</td><td>Ninguno extra</td></tr>
<tr><td>POSIBLES UBICACIONES</td><td>El jardín de piedras.</td></tr>
<tr><td>OBSERVACIONES</td><td>Las actividades no necesitan material extra.</td></tr>
<tr><td>SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES</td><td>• Actividad 1: 1ª espiral: clotoide, 2ª espiral: logarítmica, 3ª espiral: Fermat, 4ª espiral: Arquímedes
• Actividad 2: Espiral de Arquímedes
• Actividad 3: por su ecuación $\theta = \log_b(r/a)$
• Actividad final: La suma es dos $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

</td></tr>
</table>

MARZO 2015, Nº 1

Matemáticas por el campus

Estación Estadística

La Estadística es la rama de las Matemáticas que proporciona un conjunto de métodos que se utilizan para recolectar, resumir, clasificar, analizar e interpretar unos datos referidos a una característica, materia de estudio o investigación. La Estadística afecta a prácticamente todo, ni siquiera los propios números escapan a su poder.

La Ley de Benford

Una sorprendente teoría matemática llamada Ley de Benford predice que en un conjunto de números (con unas características determinadas), aquellos cuyo primer dígito es, por ejemplo, 1 no aparecen con la misma frecuencia que los números que empiezan por otros dígitos. De hecho, las frecuencias van disminuyendo conforme aumenta el primer dígito.

Quien primero se dio cuenta de este fenómeno fue en 1881 el matemático y astrónomo Simon Newcomb. Un día, Newcomb estaba usando un libro de logaritmos y se dio cuenta de que las páginas del libro estaban más viejas y usadas cuanto más cercanas estaban del principio. Ten en cuenta que en aquella época, las tablas de logaritmos se empleaban, entre otras cosas para multiplicaciones entre grandes números. Actualmente equivaldría a examinar el desgaste de la tecla "1" en cajas registradoras o calculadoras ¿A qué se debía? Sólo podía tener una explicación: a lo largo de los años se había consultado mucho más el logaritmo de los números que comenzaban por 1 que de los que comenzaban por números más altos.

El asunto fue rápidamente olvidado hasta 1938, cuando Frank Benford, un físico de la compañía General Electric, se dio cuenta del mismo patrón. Entusiasmado por el descubrimiento, estudió 20229 números provenientes de 20 muestras de todo tipo: constantes y magnitudes físicas, longitudes de ríos, estadísticas de béisbol, direcciones de personas... A partir de estos datos, postuló la llamada "ley de los números anómalos de Benford" según la cual los datos que comenzaban por el dígito 1 eran más que los datos que comenzaban por 2 y, a su vez, estos últimos más que los que empezaban por 3 y así, sucesivamente, hasta 9. El análisis de Benford era una prueba de la existencia de la ley, pero tampoco fue capaz de explicar bien por qué era así.

A pesar de que la ley resultaba obvia con sólo hacer algunas comprobaciones sencillas – siempre que el conjunto de datos fuera válido, porque no todos lo son, no fue hasta 1996 que un matemático llamado Ted Hill dio con una demostración matemática satisfactoria. La demostración tiene que ver con algunos teoremas del límite central y su relación con el comportamiento de las mantisas en las multiplicaciones de valores aleatorias.

La Ley de Benford es indudablemente un resultado interesante y sorprendente, pero ¿cuál es su relevancia? Un gran paso lo ha dado Mark Nigrini, un profesor de contabilidad de Dallas, quien propone a partir de 1994 emplear el análisis de las frecuencias de los dígitos como mecanismo analítico para detectar, por ejemplo, posibles situaciones de fraude e irregularidades.

MARZO 2015, Nº 1

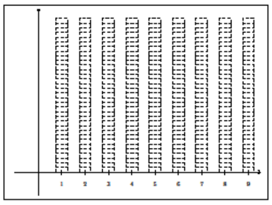
Ahora te toca a ti

Actividad 1: Comencemos

(1p) En nuestro día a día, la cuantificación de muchos fenómenos es un aspecto fundamental como, por ejemplo, el número del portal de nuestro edificio o los números de teléfono. Como has visto, la Ley Benford establece los porcentajes de datos que comienzan por un dígito determinado. Imagina que les preguntamos a 200 personas el número de portal de su edificio y su número de teléfono. Obtendremos dos conjuntos de datos, uno de ellos no puede satisfacer la Ley de Benford ¿Cuál es?

Actividad 2: Los datos

(3p) Para comenzar a comprender la Ley de Benford, necesitamos datos. Ve al párking y marca en negro una celda por cada primer dígito de las matrículas de, al menos, 100 coches sobre el valor correspondiente del eje de abcisas. De esta forma, construirás el **diagrama de barras** correspondiente a los primeros dígitos de las matrículas.



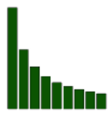
Actividad 3: Las tablas

(3p) En Estadística, es recomendable organizar los datos por medio de una **tabla de frecuencias** en la que, entre otros valores, se anota el número de veces que aparece cada dígito (frecuencias absolutas, que se denotan por f_i) y sus porcentajes p_i. Organiza tus datos en una tabla de frecuencias como la siguiente:

Primer dígito	f_i	p_i
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Actividad 4: Los conjuntos de Benford

(1p) Benford comprobó que, en su conjunto de datos, los porcentajes de valores que comenzaban por el dígito $d = 1, 2, \ldots, 9$ responden al siguiente gráfico:



Los conjuntos donde se satisface este patrón se conocen conjuntos de Benford ¿Conforman las matrículas de los coches un conjunto de Benford? ¿Un conjunto de 200 números de teléfono es un conjunto de Benford? ¿Y 400 resultados de 400 tiradas de un dado de 9 caras?

Actividad final: La Ley de Benford

(2p) Más concretamente, la Ley de Benford establece que el porcentaje de valores que comienzan por el dígito d es de $100\log_{10}(1+1/d)$ %. Esta ley se cumple, por ejemplo, en los precios de una lista de la compra. Calcula el **porcentaje de productos cuyo precio empieza por 4** y proporciona este dossier al guía de la estación.

Descripción de la actividad

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	Estadística para todo
ÁREA	Estadística
CONTENIDOS	Ley de Benford, tablas de frecuencias, porcentajes
NIVEL	A partir de ESO y BACHILLERATO
ACTIVIDADES	1. Comencemos 2. Los datos 3. Las tablas 4. Los conjuntos de Benford 5. Actividad final: La ley de Benford
MATERIALES	Calculadora
POSIBLES UBICACIONES	Cercano a un párking
OBSERVACIONES	Se puede elevar aún más el nivel para estudiantes universitarios.
SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES	• Actividad 1: Los números de teléfono • Actividad 2: Deben marcar una celda por cada matrícula • Actividad 3: Deben contar las celdas y calcular los porcentajes • Actividad 4: Las matrículas no "deben" conformar un conjunto de Benford • Actividad final: Para d=4 , 9.69%

La criptografía de las transiciones

Las transiciones entre las diferentes estaciones serán realizadas a través de códigos que permitirán incluir en nuestra ruta-yincana un área de las Matemáticas que en nuestro día a día tiene cierta relevancia: la criptografía.

En particular, el proceso a seguir es el siguiente:

1. Al comienzo de la ruta, los responsables de indicar el comienzo y establecer las normas generales avisarán a los participantes de que en los cambios de estaciones habrán de utilizar, por ejemplo, el siguiente código:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
J	**K**	**L**	**M**	**N**	**Ñ**	**O**	**P**	**Q**
10	11	12	13	14	15	16	17	18
R	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
19	20	21	22	23	24	25	26	27

2. Los participantes deberán disponer asimismo de un mapa de la zona en la que vamos a localizar la ruta y tendrá que estar dividido en una cuadrícula con tantas columnas como columnas tenga el texto (tres, en nuestro caso) y las filas suficientes para que los puntos donde colocaremos las estaciones, queden correctamente delimitados y sea sencilla su localización. Nombraremos las columnas del mapa con letras mayúsculas y las filas con números de manera que con el par letra-número podamos (a modo de juego 'hundir la flota') saber dónde tenemos que dirigirnos para la siguiente estación. A modo de ejemplo, mostramos un posible mapa:

Figura 10. Mapa del campus.

3. Supongamos que nos encontramos en la primera estación donde nos han proporcionado el dossier correspondiente. Una vez que hemos obtenido una puntuación superior a 6, el encargado de la estación nos suministrará un código, por ejemplo, **6-5-4-16-19-16-23**.

4. Los participantes, haciendo uso del código que se les entregó al principio de la actividad, deberán descubrir la palabra **FEDOROV** y deberán buscar la palabra en el dossier de la estación en la que se encuentren. Así, por ejemplo, Fedorov se encuentra en la séptima fila de la segunda columna.

5. La finalidad de la palabra encriptada es proporcionar la localización de la siguiente estación de la ruta. Cada columna del texto se identifica con una letra (A-1 ; B-2 ; C-3) de forma que, si la palabra la hemos localizado en la columna izquierda, central o derecha, le haremos corresponder la letra A, B ó C, respectivamente. Además, contando el número de fila en que se encuentra podemos relacionarla con un número. Así, nuestra palabra encriptada, que ya hemos decodificado, nos proporciona una pareja (letra, número) que utilizaremos sobre el mapa del campus de la Universidad de Alicante entregado al inicio de la ruta. A través de este procedimiento, en nuestro ejemplo podremos decir que la segunda estación se encuentra en la casilla B7 del mapa.

Lógicamente, serán los participantes los que tienen que descubrir el procedimiento seguido para la buena utilización de los códigos y hemos de contemplar la posibilidad de que consuman cierta cantidad de tiempo hasta interpretarlos correctamente.

La valoración de los participantes

Siempre que se plantea una actividad, y se lleva a cabo es necesario, evaluar los resultados obtenidos para recoger las opiniones de los usuarios y así tenerlas en cuenta a la hora de mejorar el diseño, implantación y desarrollo de la misma. En este sentido, hemos elaborado una encuesta de satisfacción para recoger las opiniones y extraer conclusiones de las opiniones y que puede ser diferente según el colectivo que realice la ruta. El modelo de encuesta de satisfacción es el siguiente:

<u>Valora en una escala de 0 a 5 (0=para nada, 5=totalmente)</u>

- ¿Volverías a participar? Marca con una X.

0	1	2	3	4	5

- ¿Piensas que los lugares establecidos son los idóneos para la realización de estas actividades? Valóralo por fichas.

	0	1	2	3	4	5
Ficha Álgebra						
Ficha Análisis Matemático						
Ficha Geometría						
Ficha Estadística						

- En general, ¿estás satisfecho con los apartados específicos tratados en estas actividades?

0	1	2	3	4	5

- ¿Incluirías algún apartado adicional? ___________________________________

- ¿Has descubierto aspectos nuevos en los que no habías observado relación con las matemáticas? ___________________________________

- ¿Qué aspecto desarrollado en esta actividad te ha interesado más?
  ____

- ¿Qué ficha te ha gustado más? Valora cada ficha de 0 a 5.

	0	1	2	3	4	5
Ficha Álgebra						
Ficha Análisis Matemático						
Ficha Geometría						
Ficha Estadística						

- ¿Te han resultado difíciles las actividades realizadas? Valóralo por fichas.

	0	1	2	3	4	5
Ficha Álgebra						
Ficha Análisis Matemático						
Ficha Geometría						
Ficha Estadística						

- En general, ¿estás satisfecho con nuestra actividad?

0	1	2	3	4	5

Nuestro objetivo es analizar las opiniones de los participantes en las experiencias futuras, no sólo para lograr perfeccionar los procedimientos que se incluyen en la propia ruta sino también mejorar las actividades individualmente.

Conclusiones

Como se ha comentado anteriormente es necesario idear actividades motivadoras hacia las matemáticas que destruyan la imagen inútil y no conectada con la realidad. El diseño de esta actividad tipo ruta-yincana proporciona un aprendizaje lúdico de las matemáticas a través de los elementos que día tras día rodean a los estudiantes sin que ellos perciban la implicación de las mismas.

En este trabajo hemos presentado una ruta-yincana enfocada, al menos en las experiencias iniciales, para estudiantes de universidad, aunque también podrían surgir diferentes rutas previstas para estudiantes de secundaria o bachiller. Desde nuestro punto de vista es importante establecer vínculos entre las distintas etapas de la educación, y la integración de unas en otras, que enriquecerá a todos los participantes en este proceso. Al mismo tiempo los alumnos recorrerán las instalaciones que en años posteriores posiblemente habitarán con motivo de sus estudios universitarios pero desde un punto de vista matemático, complementando así su formación en el aula y percibiendo las matemáticas en el entorno que nos rodea.

La Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante cuenta con múltiples iniciativas de contacto entre institutos y Universidad, tales como: el programa “Ven a hacer prácticas a la Universidad”, las actividades vinculadas a la celebración de “San Alberto Magno”, pruebas “Cangur”, participación en el programa Estalmat, y visitas de los centros de secundaria a los diferentes departamentos, entre otras, en las que sería factible la puesta en marcha de esta experiencia. Con esta perspectiva, es indudable que sería fundamental adaptar las actividades propuestas al nivel de los estudiantes que realicen este recorrido matemático, proponiendo actividades adecuadas al nivel, y motivaciones de los alumnos a los que va dirigida la ruta-yincana, consiguiendo, por tanto, ofertarla a un público más variado.

Nuestros esfuerzos se han centrado en realizar un diseño óptimo de las diferentes rutas que intenten abarcar un amplio y diverso abanico de conceptos (introduciendo actividades de las principales ramas de las matemáticas), cuyas estaciones se encuentren separadas por una distancia mínima (para no perder excesivo tiempo entre las distintas transiciones), e intentando que el alumno no perciba una sensación de sobrecarga o estrés. El objetivo es que los participantes aprendan y refuercen conceptos de forma agradable.

Esta experiencia será puesta en práctica próximamente y estudiaremos la valoración y opinión de los participantes para ser presentada en posteriores congresos.

Referencias bibliográficas

[1] Corbalán, F. (2007):"Rutas matemáticas por nuestra localidad". Sigma, nº 30, 105-116.

[2] Devesa, A.F.; Fargueta, R.M.; Gutiérrez, C.; López, F. (2001):"Ruta matemática por Elche". Ajuntament d'Elx, Regidoria d'Educació, Elche (España).

[3] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2012): "A new approach to disseminate mathematics". ICERI 2012 Proceedings, International Association of Technology Education and Development (IATED), 4436-4442.

[4] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2012):"Un nuevo enfoque divulgativo para la enseñanza de las matemáticas en la docencia universitaria". X Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria. La participación y el compromiso de la comunidad universitaria, Universidad de Alicante, 2035-2048, Alicante (España).

[5] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2013):"Is Maths everywhere? Our students respond". INTED 2013 Proceedings, International Association of Technology Education and Development (IATED), 4287-4296.

[6] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2013):"Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria". XI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica, Universidad de Alicante, 2144-2157.

[7] Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2014):"Algunas estructuras matemáticas del campus de la Universidad de Alicante". XII Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria. El reconocimiento docente: innovar e investigar con criterios de calidad, Universidad de Alicante, 479-493.

[8] Sánchez, F. (2013): "Elaboración de una ruta matemática en la ciudad de Valladolid". Trabajo fin de máster, Universidad de Valladolid. Valladolid (España). En línea: http://cerro.cpd.uva.es/bitstream/10324/3857/1/TFM-G%20221.pdf

[9] Usón, C.; Ramírez, A.: "Rutas matemáticas III: El mudéjar". Área de Cultura y Educación del Ayuntamiento de Zaragoza, Zaragoza (España).En línea: http://www.zaragoza.es/cont/paginas/educacion/pdf/rutasmudejarprof.pdf