Matemáticas en los sistemas electorales con representación proporcional

Victoriano Ramírez González; Carmen M. Ramírez Márquez

email: vramirez@ugr.es; carmen.ramirez.marquez@correos.com

Dpto. Matem. Aplicada, Universidad de Granada; Correos - Madrid

RESUMEN

Los sistemas electorales basados en la representación proporcional necesitan una fórmula para transformar los votos en escaños. También, muchos de ellos, establecen barreras electorales. Para lo uno y lo otro se pueden usar diferentes métodos matemáticos. Aquí se muestra cómo funcionan varios métodos de reparto proporcional de escaños (Restos Mayores, Sainte-Laguë y D'Hondt) y algunas de sus propiedades. También se muestra el efecto insensato de las barreras electorales porcentuales, provocado por utilizar funciones discontinuas. Parte del material que contiene este trabajo puede servir para actividades en Secundaria o en Bachiller.

Palabras clave: *Representación proporcional, sistema electoral, D'Hondt, barreras*

1. Introducción. Sistema electoral

Uno de los capítulos más importantes al elaborar una ley electoral es el sistema electoral. En él se contempla el tamaño del parlamento, las circunscripciones electorales y sus tamaños, las barreras electorales y el método por el que se asignan los escaños a los partidos políticos.

Elegir un tamaño u otro para el parlamento es más bien una decisión política que no requiere un apoyo matemático significativo. Lo mismo ocurre con la descripción de las circunscripciones electorales.

Sin embargo, tanto para determinar el tamaño de las circunscripciones como la asignación de escaños a los partidos, en los sistemas electorales basados en la representación proporcional, se necesita un método de reparto de escaños o fórmula electoral. En ambos casos las matemáticas son imprescindibles para comprender las diferentes fórmulas electorales y sus propiedades.

Por otra parte, las barreras electorales tradicionales no son razonables; porque en unos casos tienen un efecto insignificante en el reparto de los escaños, y en otros no son ecuánimes con los partidos cuyos porcentajes de votos son próximos al porcentaje establecido como barrera electoral, pero uno de ellos ha superado ese porcentaje y el otro no. La falta de equidad se produce porque no se usan funciones continuas para definir las barreras, sino una función con una discontinuidad de salto.

El sistema electoral juega un papel fundamental en una democracia y, por tanto, afecta a todos los ciudadanos. A pesar de ello, la gran mayoría de los ciudadanos desconocen los métodos de asignación de escaños y las posibilidades que existen a la hora de establecer un sistema electoral. Esta carencia podría corregirse incluyendo alguna actividad matemática en secundaria o en bachiller.

Este trabajo puede servir de ayuda a aquellos profesores que deseen hacer una actividad de ese tipo, y también a aquellos otros que deseen ampliar sus conocimientos sobre repartos proporcionales y biproporcionales.

2. Métodos de reparto proporcional

Al hablar de reparto proporcional nos referimos generalmente a los problemas que surgen en la asignación de escaños, ya sea a las circunscripciones en proporción a sus habitantes para obtener sus tamaños, o ya sea a los partidos políticos en proporción a sus votos para obtener el número de representantes de cada partido. Es decir, problemas cuyas soluciones están constituidas por números enteros (y no negativos) que deben sumar la cantidad de escaños a repartir, h. No obstante hay otros problemas, que requieren un tratamiento completamente similar, cuyas soluciones son números con tres cifras decimales (u otra cantidad). Por ejemplo las tablas de cambio de moneda que usa la banca. No obstante, por simplicidad, en adelante nos referiremos a la distribución proporcional de escaños a los partidos políticos.

En primer lugar vamos a presentar tres métodos que son los más importantes, en cuanto a uso, en los problemas de reparto proporcional. Dos de ellos corresponden a la familia de métodos de divisores (D'Hondt y Sainte-Laguë), y el otro es el más importante de los métodos de cuotas y restos (Restos Mayores) que fue propuesto inicialmente por Hamilton y después por muchos más diseñadores de sistemas electorales (Hare, Niemeyer, etc.). Este último, el método de Hamilton, es tan simple y natural que cualquier persona que se plantea realizar un reparto proporcional con soluciones enteras suele proponerlo. Sin embargo es el menos recomendable de todos, como veremos más adelante.

Terminamos esta primera parte definiendo las dos grandes familias de métodos de reparto proporcional de escaños y presentando diversas propiedades deseables para los métodos de reparto proporcional. Las propiedades sirven para elegir un método u otro dependiendo de la respuesta que se desee obtener con el sistema electoral.

2.1 Método de Jefferson (o método D'Hondt)

El método D'Hondt es uno de los más importantes a la hora de distribuir escaños entre diferentes partidos políticos. Ha sido reinventado en varias ocasiones. En Europa se suele usar con el nombre de método D'Hondt, pero había sido usado previamente en EEUU para distribuir los escaños del Congreso entre los Estados de la Unión a propuesta de Thomas Jefferson.

Es muy conocido en el ámbito del reparto proporcional en elecciones democráticas, y es uno de los métodos más usados en la asignación proporcional de escaños a los partidos políticos. En España ha sido objeto de críticas por la distribución final de escaños que produce para el Congreso de los Diputados; sin embargo el desequilibrio en la representación de los partidos en el Congreso se debe al hecho de que dicha representación la obtienen los partidos políticos como consecuencia de 52 repartos independientes, y en la mayoría de ellos la circunscripción es de tamaño pequeño. En esas circunstancias si se usara otro método de reparto el desequilibrio podría ser menor, pero no dejaría de ser importante, y además podrían surgir otros desequilibrios porque nuevos partidos nuevos partidos de carácter autonómico podrían entrar en el Congreso.

El método D'Hondt es (o ha sido) usado en repartos proporcionales en muchos países, tales como: Argentina, Austria, Bélgica, Bulgaria, Colombia, Croacia, Ecuador, Eslovenia, España, Finlandia, Francia, Grecia, Guatemala, Irlanda, Israel, Japón, Países Bajos, Paraguay, Polonia, Portugal, República Checa, Suiza, Turquía, República Dominicana, Uruguay y Venezuela. En el caso de España se utiliza para la asignación de escaños a los partidos en las elecciones europeas, en las generales para el Congreso de los

Diputados, en las municipales (salvo municipios de menos de 250 habitantes) y en todas las elecciones autonómicas.

Por otra parte, D'Hondt, tiene ciertas propiedades de gran interés en la competición entre diferentes partidos hasta el punto de que debemos considerarlo el más recomendable en los problemas de asignación de escaños a los diferentes partidos.

2.2 La regla popular para aplicar el método D'Hondt

Veamos la regla práctica, que es bastante conocida, para realizar un reparto con el método D'Hondt (después se justifica por qué se obtiene así el reparto).

Tras escrutar todos los votos en la circunscripción en la que se va a efectuar el reparto, se construye una tabla de cocientes dividiendo los votos de cada partido por los números naturales 1, 2, 3, … *h,* siendo *h* el número de escaños a repartir.

Por ejemplo, si han concurrido 4 partidos políticos y han obtenido 720, 540, 180 y 60 votos respectivamente y hay que distribuir *h* = 6 escaños, se calcula la siguiente tabla de cocientes:

Tabla 1. Distribución de 6 escaños usando el método D'Hondt

Partido	Votos	Div.: **1**	Div.: **2**	Div.: **3**	Div.: **4**	Div.: **5**	Div.: **6**
P_1	720	**780**	**390**	**260**	**195**	132	110
P_2	540	**540**	**270**	180	135	108	90
P_3	180	180	90	60	45	36	30
P_4	60	60	30	20	15	12	10

A continuación se localizan los 6 cocientes más grandes de la Tabla 1. En nuestro caso cuatro están en la primera línea de cocientes y dos en la segunda (los marcados en negrita), entonces la asignación es: 4 escaños al partido P_1, 2 escaños a P_2, 0 escaño a P_3 y 0 escaños a P_4.

En este momento no nos preocupamos de justificar este procedimiento. Después lo veremos. Todos los métodos de divisores permiten adjudicar los escaños a partir de una tabla de cocientes obtenidos dividiendo los votos de los partidos por los "divisores" del método correspondiente.

2.3 Método de Sainte-Laguë (o de Webster)

Veamos el método inventado por Webster, si bien en Europa se le conoce como método de Sainte-Laguë, que fue un reinventor del mismo. Diferentes procedimientos han dado lugar a un mismo método a lo largo de la historia. Incluso en la literatura, y en la definición de sistemas electorales, un mismo método aparece a veces de dos formas diferentes y con nombres diferentes, como si se tratase de dos métodos diferentes.

Todos los métodos de divisores permiten hacer el reparto de escaños siguiendo el algoritmo usado para D'Hondt en la Tabla 1. Es decir, calculando unos cocientes y localizando los *h* más grandes. Lo que cambia de un método de divisores a otro son los divisores que se usan para obtener los cocientes. En el caso del método de Sainte-Laguë los divisores son los números impares (1, 3, 5, 7, …); por eso, también se conoce este método como el de los divisores impares. A continuación en la Tabla 2 mostramos los cocientes que se obtienen. En principio tendríamos que haber calculado también las columnas con los divisores 9 y 11, pero al estar seguros de que no eran necesarios, para encontrar los 6 cocientes más altos, no los hemos incluido en la Tabla 2.

Tabla 2. Distribución de 6 escaños usando el método Sainte-Laguë

Partido	Votos	Div.: **1**	Div.: **3**	Div.: **5**	Div.: **7**
P_1	720	**780**	**260**	**132**	102.8
P_2	540	**540**	**180**	108	77.1
P_3	180	**180**	60	36	25.7
P_4	60	60	20	12	8.5

De nuevo se localizan los 6 cocientes más grandes, que en este caso tres de ellos están en la primera línea, dos en la segunda y uno en la tercera (los marcados en negrita), entonces la asignación es: 3 escaños para el partido P_1, 2 escaños para P_2, 1 escaño para P_3 y 0 escaños para P_4.

El método Sainte-Laguë se aplica (o se ha aplicado) entre otros países en Alemania, Nueva Zelanda, Noruega, Suecia, Dinamarca, Bosnia Herzegovina, Letonia, Kosovo, y los estados alemanes de Hamburgo y Bremen.

En otros casos se modifica el primer divisor (pasando a ser 1.4 en lugar de 1), con objeto de dificultar la obtención del primer escaño y evitar la aparición de muchos partidos pequeños. Por ejemplo es lo que se hace en algunos países nórdicos, como Suecia. A esa modificación de Sainte-Laguë se le denomina método de Sainte-Laguë Modificado.

2.4 Método de los Restos Mayores (o de Hamilton)

El método de los Restos Mayores, RM, empieza calculando las proporciones exactas de escaños que corresponden a cada partido, esas proporciones son conocidas también con el nombre de cuotas. Para los datos del ejemplo anterior las cuotas de los cuatro partidos son:

$$q_1 = \frac{6*720}{1500} = 2.88, \quad q_2 = \frac{6*540}{1500} = 2.16, \quad q_3 = \frac{6*180}{1500} = 0.72, \quad q_4 = \frac{6*60}{1500} = 0.24$$

RM asigna 2 escaños a P_1, 2 a P_2 (porque eso valen las partes enteras de sus cuotas) y, cómo quedan otros dos escaños por asignar, localiza los dos restos más grandes, que son el 0.88 de P_1 y el 0.72 de P_1, con lo cual P_1 y P_3 obtienen un escaño adicional, mientras que P_4 no recibe ningún escaño.

En este caso los dos métodos Sainte-Laguë y RM han dado el mismo reparto. Es algo que ocurre con frecuencia, sobre todo cuando el número de escaños a repartir es pequeño.

2.5 Las dos familias de métodos de reparto proporcional

Podemos escribir los votos de los *n* partidos que compiten por *h* escaños en forma de vector $v = (v_1, \quad v_2, \quad ..., \quad v_n)$, entonces un método de reparto proporcional, requiere:

1. Aplicar un **factor** al vector de votos.
2. **Redondear** las cantidades obtenidas a números enteros (no negativos) que sumen h.

Unos métodos fijan el factor. Otros fijan el criterio para redondear a números enteros.

Los métodos que fijan el factor asignan a cada partido tantos escaños como corresponde a las partes enteras de las fracciones obtenidas y los escaños que queden pendientes de asignar corresponden uno por cada resto más grande. Los denominamos métodos de cuotas y restos.

> Los métodos que establecen el criterio de redondeo de las fracciones a números enteros necesitan ajustar el factor para que los redondeos sumen *h*. Los denominamos métodos de divisores.

Del primer grupo se ha propuesto a lo largo de la historia un número pequeño de métodos y, prácticamente la mayor atención la acapara el método RM.

El segundo grupo contiene infinitos métodos, pero los que se han usado no llegan a una decena y realmente importantes para la asignación de escaños a los partidos políticos no hay más que tres (D'Hondt, Sainte-Laguë y Sainte-Laguë modificado)

2.6 Métodos de cuotas y restos

Los métodos que fijan el factor son métodos de cuotas y restos mayores. Siendo el de Hamilton o RM el más importante de todos, pero no es el único. El factor que aplica el método RM a los votos es $\frac{h}{T}$ siendo *h* el número de escaños a repartir y *T* el número total de votos de los partidos con derecho a participar en el reparto; ese factor ha sido 6/1500 en el ejemplo que hemos visto anteriormente.

Otro método de cuotas y restos es el de Droop. Con él se trata de beneficiar a los partidos más grandes aumentando el factor con respecto a RM. El factor que usa este método es $\frac{h+1}{T}$, que en teoría puede ser inaplicable porque las partes enteras pueden llegar a sumar *h*+1. Eso hace que a veces encontremos Droop a partir del factor anterior y otras, cuyos autores quieren garantizar más rigor, usan un valor algo menor.

Ejercicio. Vamos a utilizar como datos los votos obtenidos en las elecciones europeas de Mayo de 2014 en la Región de Murcia. Los usamos como si se tratase de unas elecciones al Congreso de los Diputados en esta circunscripción electoral, en la cual se distribuyen 10 escaños.

Tabla 3. Distribución con RM y Droop de 10 escaños en Murcia (2014)

Partido	Votos	Cuotas	RM	C. Droop	Droop
PP	160117	4.22	4	4.65	4+1
PSOE	88617	2.34	2	2.57	2
IU	41860	1.10	1	1.22	1
UPyD	40406	1.07	1	1.17	1
Podemos	32428	0.86	0+1	0.94	0+1
C'S	15461	0.41	0+1	0.45	0
Total	378889	10.00	10	11.00	10

Las cuotas para hacer el reparto con RM (columna 3ª) se han obtenido multiplicando los votos por el factor 10/378889 y las cuotas para Droop (columna 5ª) usando el factor 11/378889.

Al distribuir los escaños con RM los dos últimos escaños corresponden a los restos mayores, que en ese caso son el 0.86 de Podemos y el 0.41 de C's. Al usar el método Droop también quedan dos escaños por asignar después de elegir las partes enteras, pero en este caso los dos restos mayores corresponden a Podemos y a PP, como se observa en la última columna. Así el PP onseguiría un escaño más usando Droop que usando RM y ese escaño ha sido a costa de C's.

Además de los 6 partidos que aparecen en la Tabla 3 concurrieron otros 33 que obtuvieron pocos votos; ninguno de ellos alcanzó el 3% de los votos, que es la barrera electoral para las elecciones al Congreso de los Diputados y, por tanto, ninguno de ellos tiene derecho a participar en la asignación de escaños en esta circunscripción electoral, por eso no aparecen en la tabla.

Observamos que aplicando RM el partido C's cuya cuota vale 0.41 recibe un escaño, es decir su representación habría sido casi dos veces y media superior a su cuota. Es algo que también puede ocurrir con Droop. Sin embargo un partido con cuota igual a 4 no puede recibir 8 o 10 escaños con RM ni con Droop.

RM se ha usado bastante, Droop no.

2.7 Métodos de divisores

Se puede hacer un planteamiento diferente para obtener métodos de reparto proporcional de escaños. Vamos a explicarlo de igual forma que podríamos hacerlo en una clase con alumnos de últimos cursos de secundaria o de bachiller, que no conocen nada acerca de fórmulas electorales.

Supongamos que tenemos que redondear a números enteros unas cantidades como las que aparecen abajo. Por ahora se les dice a los alumnos que no tienen preocuparse, de que la suma de los redondeos tenga que tener un determinado valor. Solo se trata de que aproximen cada una de esas cantidades por el número entero que cada uno de ellos considere más apropiado. Las cantidades son las siguientes:

(7.84, 6.15, 4.66, 2.05, 1.79, 0.31)

La propuesta debe parecer casi unánime. Pues muchos alumnos, posiblemente todos, van a dar la respuesta siguiente:

(8, 6, 5, 2, 2, 0)

Entonces hay que indicarle que se trata de una respuesta muy buena y a continuación se les pregunta ¿desde qué valor aproximaría una fracción por el entero superior?

Para muchos alumnos la respuesta rápida es: si el resto es mayor que 0.5 se redondea al entero por exceso y si es menor que 0.5 se redondea por defecto. Perfecto hay que felicitarles diciéndole que ellos acaban de reinventar el método de Sainte-Laguë, que es uno de los métodos importantes para el reparto proporcional de escaños y que consiste, como ellos han sugerido, redondearlas fracciones al entero más próximo. Puede que les surja la duda de qué hacer si la fracción es exactamente 0.5, a lo cual hay que contestar que los dos redondeos serían igualmente válidos, de hecho eso es lo que ocurre cuando nos dicen que se ha producido una situación de empate en un reparto de escaños.

Ahora se pregunta cómo distribuir 10 escaños con Sainte-Laguë si 1000 electores han dado los siguientes votos a cuatro partidos: P_1 410 votos, P_2 310 votos, P_3 240 votos y P_4 40 votos. Los primero que se puede hacer es calcular las proporciones exactas que corresponderían a cada partido, es decir las cuotas, para ello se multiplican los votos por el factor de RM que vale 10/(470+310+160+60) = 10/1000=0.01, con lo que resulta:

(4.10, 3.10, 2.40, 0.40)

En tal caso al aplicar los redondeos con Sainte-Laguë se obtienen las asignaciones:

(4, 3, 2, 0)

El reparto no es válido porque habríamos distribuido solo 9 escaños. Parece que el método no sirve en este caso; pero no es así, porque nadie les obligaba a usar como factor de proporcionalidad el valor 0.01, por tanto podemos coger uno más grande.

Probando con factores algo mayores pronto encontramos uno que es apropiado para que resulten10 escaños asignados. Por ejemplo, usando el factor 0.0105 se tienen las siguientes fracciones:

(4.305, 3.255, 2.52, 0.42)

Y los redondeos Sainte-Laguë son:

(4, 3, 3, 0)

Que suman 10 y, por tanto, ese es el reparto con dicho método.

Ahora es interesante poner otro ejemplo que cuestione la idoneidad de Sainte-Laguë en algunos problemas de reparto de escaños a los partidos políticos.

Supongamos que los votos en un municipio donde se eligen 15 concejales son:

$$V = (802,\ 250,\ 224,\ 57,\ 56,\ 56,\ 55)$$

En total suman 1500 votos. Si calculamos las cuotas se obtiene las siguientes cantidades:

$$q = 0.01V = (8.02,\ 2.50,\ 2.24,\ 0.57,\ 0.56,\ 0.56,\ 0.55)$$

El factor aplicado para obtener las cuotas (que de nuevo ha sido 0.01) no permite obtener el reparto con Sainte-Laguë porque los redondeos al entero más próximo suman 16 o 17 concejales (según redondeemos por exceso o por defecto la cuota del segundo partido. Aplicando a los votos un factor algo menor, por ejemplo 0.0092, se obtienen las fracciones siguientes:

$$(7.46,\ 2.33,\ 2.06,\ 0.53,\ 0.52,\ 0.52,\ 0.51)$$

Con lo cual el reparto Sainte-Laguë es:

$$(7,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

Por tanto, los cuatro partidos pequeños han recibido un concejal cada uno de ellos. Entre los cuatro han recibido el doble número de concejales que el partido segundo, a pesar de que entre los cuatro recibieron los mismos votos que el segundo partido. Por otra parte el partido vencedor había obtenido más del 53% de los votos y, sin embargo, tiene menos de la mitad de los concejales.

Así, con el método de Sainte-Laguë un partido con pocos votos, cuya cuota sea algo superior a 0.5, puede recibir casi el doble de la representación que corresponda a su cuota. Y un partido con mayoría absoluta de votos puede que reciba menos de la mitad de los escaños.

Por ello, vamos a pensar en un método que dificulte la representación a los partidos cuya cuota no alcance el valor 1 para evitar una gran fragmentación y facilitar la gobernabilidad ¿cómo habría que redondear las fracciones para conseguirlo?

La respuesta es redondear al entero por defecto. Si algún alumno dice que se redondeen todas hacia abajo hay que felicitarle porque acaba de reinventar el método D'Hondt.

Ahora volvemos al ejemplo de los 15 concejales para distribuir los escaños sabiendo que debemos redondear las fracciones al entero por defecto que esté más próximo. Si usamos de nuevo el factor de RM para emepezar y , entonces, observamos que los redondeos por defecto de esas fracciones suman 8+2+2+0+0+0=12. Por tanto ahora el factor para el método D'Hondt tiene que ser mayor que 0.01. Probando, encontramos que con 0.013 se obtiene:

$$0.013V = (10.43,\ 3.25,\ 2.91,\ 0.74,\ 0.73,\ 0.73,\ 0.72)$$

$$\text{D'Hondt} = (10,\ 3,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

Cuyos redondeos a la baja suman 15 y por tanto ya tenemos el reparto D'Hondt.

Conviene resaltar con respecto a los repartos con Sainte-Laguë y D'Hondt, obtenidos anteriormente, que el Sainte-Laguë asignó al partido vencedor 7 concejales a pesar de que su cuota era superior a 8; eso quiere decir que violó la cuota inferior de ese partido. Por el contrario D'Hondt asignó al vencedor 10 escaños con lo cual violó la cuota superior de ese partido (que vale 9). Se trata de un ejemplo académico, es decir no corresponde a un caso real.

En teoría es posible encontrar ejemplos en los que Sainte-Laguë viole la cuota inferior o la cuota superior, pero en la práctica es muy difícil que ocurra alguna de esas violaciones.

Por el contrario el método D'Hondt jamás puede asignar a un partido menos escaños de su cuota inferior, pero es fácil encontrar ejemplos reales en los que viola la cuota superior, sobre todo si hay circunscripciones grandes. En la violación de la cuota superior con el método D'Hondt el partido beneficiado suele ser uno de los más votados.

Lógicamente el método <u>RM siempre cumple la cuota</u>, porque la asignación de escaños a los partidos será el redondeo por exceso de su cuota (los que tienen restos más grandes) o el redondeo por defecto de su cuota (los que tienen restos más pequeños).

<u>Verificar la cuota</u> suele ser una propiedad apetecible por quienes proponen un método de reparto buscando imparcialidad o por quienes tratan de minimizar la diferencia entre cuotas y escaños. Eso ha llevado muchos políticos y algunos investigadores a apostar por el método RM, sin embargo hay muchas otras propiedades deseables para un método de reparto de escaños que son más importantes que la cuota y ello hace que la elección de un método de reparto no sea tan trivial.

2.8 Equivalencia de técnicas para el reparto con el método D'Hondt

Volvamos al reparto con el método D'Hondt realizado en el apartado anterior. Tras multiplicar los votos por 0.013 se obtuvieron las fracciones:

$$(10.43,\ 3.25,\ 2.91,\ 0.74,\ 0.73,\ 0.73,\ 0.72)$$

Cuyos redondeos por defecto dieron la distribución de los 15 concejales: 10-3-2-0-0-0-0. ¿Se habría obtenido el mismo resultado si hubiésemos calculado una tabla de cocientes, como se hizo en la Tabla 1, y localizado los 15 cocientes más grandes?

¿Qué ocurre si dividimos la fracción 10.43 por los números naturales, 1, 2, 3, …? Evidentemente los 10 primeros cocientes son mayores que 1 y los restantes son inferiores a la unidad. Si calculamos los cocientes con el 3.25 ahora los 3 primeros son mayores que la unidad y los restantes son inferiores a 1. Por último con el 2.91 obtenemos sólo dos cocientes mayores que la unidad y con las demás fracciones todos los cocientes son menores que 1. Con las fracciones de los demás partidos no se obtienen cocientes mayores o iguales a 1. En total aparecen 15 cocientes mayores que la unidad, de los cuales 10 se han obtenido con la fracción del primer partido, 3 con la fracción del segundo partido y dos con la del tercero.

Si en lugar de usar las fracciones anteriores, para calcular los cocientes, hubiésemos usado los votos de los partidos, los 15 cocientes más grandes hubiesen ocupado las mismas posiciones en la tabla de cicientes.

El razonamiento para el método de Sainte-Laguë es el mismo, solo que se empieza dividiendo por 0.5, 1.5, 2.5, …, que es equivalente (cara a obtener los cocientes más grandes) a dividir por el doble, es decir, por 1, 3, 5, … (los divisores impares).

Lo mismo ocurre con cualquier método de divisores. No hay que andar probando un factor para conseguir que los redondeos sumen *h.* Basta obtener una tabla de cocientes y localizar los *h* más grandes.

3. Propiedades deseables en la asignación proporcional

<u>Exactitud</u>. Lo primero que se suele exigir a un método de reparto proporcional es que "si todas las cuotas son números enteros entonces esa sea la respuesta del método". Es decir, si no hay problema con la aproximación el método no debe dar una solución extraña.

Homogeneidad. El reparto con un método debe ser el mismo si los votos nos los dan por unidades, por decenas, por miles, por porcentajes, o bien multiplicados por cualquier número mayor que cero.

Monotonía. Un método de asignación de escaños se dice que es monótono si ante cualesquier distribución fija de votos, al aumentar el número de escaños a distribuir ningún partido pierde escaños.

Por ejemplo, si para los mismos votos obtenidos en la circunscripción de Murcia en 2014, los que usamos en la Tabla 3, tuviésemos que asignar 16 escaños con RM se tiene el resultado que aparece en la Tabla 4.

Tabla 4. Distribución con RM de 16 escaños en Murcia con los datos del PE de 2014

Partido	Votos	Cuotas	RM
PP	160117	6.76	7
PSOE	88617	3.74	4
IU	41860	1.77	2
UPyD	40406	1.71	2
Podemos	32428	1.37	1
C'S	15461	0.65	0
Total	378889	16.00	16

Con lo cual, usando el método RM, C's habría obtenido un escaño en Murcia si se distribuyen10 escaños, pero no obtiene ninguno si se distribuyen 16 escaños. Esta paradoja se conoce con el nombre de paradoja de Alabama. La hemos mostrado usando datos reales de unas elecciones y surge con frecuencia cuando se hacen repartos con el método RM.

Es evidente que cualquier método de divisores es monótono, porque si hay que distribuir más escaños no puede disminuir el factor y, por tanto, ninguna fracción disminuye de tal forma que aquellas que habían superado en valor desde el que habían redondeado lo siguen superando.

Consistencia. Un método de reparto de escaños se dice que es consistente si al aplicarlo a una parte de la votación reproduce los mismos resultados. Por ejemplo en la Tabla 4 observamos que entre PP y C's habrían recibido 7 escaños al distribuir los 16 escaños de Murcia con RM. Entonces vamos a distribuir ahora 7 escaños entre ambos partidos con RM. La Tabla 5 contiene los resultados.

Tabla 5. Distribución con RM de 7 escaños entre PP y C's

Partido	Votos	Cuotas	RM
PP	160117	6.38	6
C'S	15461	0.62	1
Total	175578	7.00	7

Observamos que RM no es consistente. En la tabla 4 el reparto para PP-C's era 7-0, en la Tabla 5 es 6-1. Cualquier método de divisores es consistente, porque el factor usado para conseguir el reparto con la totalidad de los partidos se puede aplicar a la parte elegida y, por tanto, reproduce el mismo reparto.

Evitar paradojas. El método RM da lugar a otras paradojas, además de la de Alabama. Por ejemplo, la paradoja de los nuevos partidos y la paradoja de los votos representan otros dos comportamientos rechazables de este método.

Veamos la paradoja de los nuevos partidos. Para ello, basta suponer que en la Tabla 4 hubiese existido un partido adicional (P) con 15000 votos.

Entonces la distribución de los escaños con RM sería la que aparece en la Tabla 6.

Tabla 6. Distribución con RM de 16 escaños incluyendo un nuevo partido P

Partido	Votos	Cuotas	RM
PP	160117	6.50	6
PSOE	88617	3.60	3
IU	41860	1.70	2
UPyD	40406	1.64	2
Podemos	32428	1.32	1
C'S	15461	0.63	1
P	15000	0.61	1
Total	378889	16.00	16

Se observa que el nuevo partido recibe un escaño, pero además C'S también recibe un escaños, es decir a C's le ha beneficiado que exista un partido más a la hora de distribuir los 16 escaños, pues a pesar de que ese partido P ha recibido un escaño C's ha aumentado su representación con respecto a los que recibió en la Tabla 4.

<u>Verificar la cuota inferior.</u> Como hemos indicado anteriormente un método de reparto proporcional verifica la cuota si no asigna a un partido más escaños del redondeo de su cuota por exceso ni menos del redondeo de su cuota por defecto. Esta propiedad no la verifica ningún método de divisores. Sin embargo si exigimos solo la segunda parte, es decir que el método garantice a cada partido al menos tantos escaños como corresponden al redondeo por defecto de su cuota, llamada cuota inferior, sí existen métodos que la verifiquen.

Verificar la cuota inferior es una propiedad atractiva para todos los partidos grandes y medianos porque les garantiza que en la asignación no van a llegar a perder un escaño con respecto a su cuota.

<u>Fortalecer coaliciones (castigar los cismas en los partidos).</u> Se dice que un método fortalece coaliciones la división de un partido en dos no le reparta más escaños. Para ello, se hace la hipótesis de que entre los dos partidos resultantes de la división reciben exactamente igual número de votos que si hubiesen concurrido juntos , también se supone que no se producen variaciones en los votos de los restantes partidos.

Es evidente que esta propiedad no la verifica RM. Bastaría separar los votos del PP en la Tabla 6 de forma que las cuotas de los partidos resultantes de la escisión fuesen 5.70 y 0.80, con lo cual el primero recibiría 6 escaños y el segundo 1 escaño. Tampoco la verifican la mayoría de los métodos de divisores. De hecho, verificar la cuota inferior es una propiedad característica de D'Hondt.

<u>Transferencia correcta.</u> Si nos fijamos en cualquier tabla anterior, por ejemplo, en la Tabla 3 que se distribuían 10 escaños y el total de votos fue 378889, por cada 37888.9 corresponde un escaño. Por tanto si se transfiere esa cantidad de votos (aunque dicho número no sea un número entero) del PP al PSOE la cuota del PP disminuye en una unidad y la del PSOE aumenta en una unidad, con lo cual el reparto con RM asigna un escaño menos al PP y uno más al PSOE. Lo mismo ocurre si se transfiere una cantidad algo diferente a la indicada anteriormente, pero próxima a ella.

La propiedad relativa a la transferencia correcta se enuncia de forma general como sigue: dado un partido que ha recibido más escaños que otro, al distribuirlos con un método de divisores M^d ¿será siempre posible transferir un número *r* de votos del partido más votado al menos votado de forma que el nuevo reparto con dicho método asigne un escaño menos al partido que ha reducido sus votos y un escaño más al que ha aumentado sus votos? Cuando esa transferencia es siempre posible sea cual sea el problema de reparto decimos que el método transfiere correctamente votos y escaños.

Obsérvese que en el caso más trivial de transferencia de votos del PP al PSOE en la Tabla 3 podríamos llegar a igualarlos. La respuesta es que un método de divisores transfiere correctamente ante cualquier problema si y solo si es un método de la familia paramétrica, que son los métodos que sitúan los puntos de redondeo en la misma posición sea el intervalo que sea. Por ejemplo, Sainte –Laguë sitúa el redondeo siempre en centro del intervalo, D'Hondt lo sitúa siempre en el extremo superior del intervalo. Sin embargo el método de Sainte-Lagué Modificado (usado en los países nórdicos establece como punto de redondeo el 0.7 para el intervalo [0, 1], es decir, las fracciones que pertenezcan a ese intervalo las redondea a cero si son inferiores al 0.7 y las redondea a un escaño si son mayores que 0.7, pero las fracciones de los restantes intervalos las redondea al entero más próximo, porque los demás puntos de redondeo son 1.5, 2.5, 3.5,…. Por tanto, como no es un método de la familia paramétrica existen problemas en los cuales no transfiere correctamente votos y escaños.

Imparcialidad. Un método de reparto se dice que es imparcial si no beneficia de forma sistemática a los partidos pequeños frente a los grandes ni al contrario.

Lógicamente todas las propiedades anteriores no son compatibles.

De hecho no es razonable que se deseen todas para un mismo problema de reparto. Por ejemplo, resultaría contradictorio requerir que un método sea imparcial y que fortalezca coaliciones (que viene a significar que beneficie a los partidos grandes con respecto a los pequeños).

4. Elección de un método de reparto proporcional

Para la elección de un método lo que debemos hacer es establecer una tabla con las propiedades que verifica cada uno de ellos y después elegir el método en función sus propiedades.

Todos los métodos, tanto los basados en cuotas y restos como los de divisores son exactos y homogéneos, con lo cual esas dos propiedades no las incluimos en el cuadro siguiente (Tabla 6)

Tabla 7. Cuadro de propiedades y métodos

	RM	D'Hondt	Sainte-L	Sainte-LM
Monotonía	NO	**SI**	**SI**	**SI**
Consistencia	NO	**SI**	**SI**	**SI**
Evitar Paradojas	NO	**SI**	**SI**	**SI**
Cuota	**SI**	NO	NO	NO
Cuota Inferior	**SI**	**SI**	NO	NO
Fortal. Coalic.	NO	**SI**	NO	NO
Transf. Correcta	**SI**	**SI**	**SI**	NO
Imparcial.	**SI**	NO	**SI**	NO

Sugerencia.

Para distribuir escaños entre diferentes partidos el método D'Hondt es el más recomendable. Cuando la imparcialidad sea muy importante, por ejemplo al calcular el tamaño de las circunscripciones electorales o bien para una distribución interna dentro de un partido, el método de Sainte-Laguë es el más recomendable.

RM es rechazable por ser inconsistente, presentar paradojas y no ser monótono.

5. Falta de equidad y discordancias

Una de las respuestas más rechazables de un sistema electoral es que no sea ecuánime con partidos que han recibido un número de votos muy similar.

Por ejemplo, en las elecciones generales de 2008 el PNV obtuvo 306128 votos y UPyD 306079 (es lo que se conoce como empate técnico) sin embargo el sistema electoral asignó 6 escaños al PNV y solo un escaño a UPyD, un trato muy desigual a partidos con similar número de votos.

Otro ejemplo lo tenemos en las elecciones de Letonia en 2002, donde PL con 53396 votos obtuvo 7 escaños mientras que CL con 48430 no recibió ninguno.

El sistema electoral español para el Congreso de los Diputados produce faltas de equidad con frecuencia, porque está basado en 52 repartos independientes entre sí.

En otros muchos países también se producen faltas de equidad aunque asignen los escaños a los partidos de acuerdo con sus votos totales. En esos casos la falta de equidad se produce porque establecen barreras electorales, que hay que superarlas para participar en el reparto.

Así, Alemania tiene una barrera de un 5% de los votos a nivel nacional. Un partido que alcance el 5% de los votos tiene garantizado el 5% de los escaños, que son al menos 30, mientras que otro partido al que falten algunos votos para el 5% no recibe ningún escaño.

Las discordancias son contradicciones entre los votos totales y los escaños totales cuando comparamos los resultados de dos partidos políticos.

Es decir, una discordancia se produce cuando un partido A ha obtenido más votos que otro partido B, pero A ha recibido menos escaños que B. Por ejemplo, en 2011 la coalición IU obtuvo 1686040 votos y 11 escaños mientras que CiU obtuvo1015691 votos y 16 escaños. Podría ocurrir que los dos partidos implicados en una discordancia estuviesen sobrerrpresentados, o ambos infrarrepresentados. En España lo que suele ocurrir es que el partido perjudicado en cualquiera de las discordancias que se producen es de ámbito nacional y recibe pocos escaños con respecto a su cuota.

Estas contradicciones son muy frecuentes en todas las elecciones al Congreso de los Diputados. De hecho este sistema electoral es uno de los que produce mayor número de grandes discordancias en todo el mundo.

Si se desea que no existan discordancias es necesario asignar los escaños a los partidos de acuerdo con sus votos totales y después distribuir los escaños que hayan correspondido a cada partido entre las 52 circunscripciones electorales. Es lo que se hace en los países nórdicos, en Alemania y en otros países, aunque con métodos diferentes.

6. Repartos biproporcionales

Los tamaños de las circunscripciones suelen ser en función de sus habitantes, a veces primando a las más pequeñas, como ocurre en España que asigna un escaño de diputado a Ceuta, otro a Melilla y dos a cada provincia; los 248 restantes los distribuye entre las provincias en proporción a sus poblaciones usando el método RM .

Por otra parte la asignación de los escaños a los partidos debiera ser en función de sus votos totales; pero con cierta ventaja a los más votados, para evitar la fragmentación del parlamento y facilitar la gobernabilidad.

En tal caso nos encontraríamos con un problema de reparto en el que se dispone de una tabla rectangular que contiene los votos de cada partido en cada una de las 52 circunscripciones electorales y además hay una doble restricción: las circunscripciones tienen que recibir un número de escaños, que se debió calcular publicar antes de las elecciones, y los partidos deben recibir unos escaños que se han calculado en función de sus votos totales. Una forma de resolver este problema es mediante un reparto biproporcional.

La tabla de votos y restricciones para la elección del Congreso de los Diputados tendría un tamaño muy grande porque hay 52 circunscripciones y más de 10 partidos. Por tanto vamos a usar un ejemplo mucho más simple para mostrar en qué consiste un reparto biproporcional y cómo se resuelve.

Ejemplo de reparto biproporcional

La Tabla 8 contiene los votos de tres partidos en 4 circunscripciones electorales. Además la última columna contiene los escaños que debe recibir cada circunscripción electoral y la última fila los escaños que debe recibir cada partido, que se han obtenido aplicando D'Hondt a los votos totales de los partidos.

Tabla 8. Ejemplo de reparto biproporcional

	P_1	P_2	P_3	Totales
Circunscr. 1	32400	21600	15300	**7**
Circunscr. 2	27600	24000	28800	**6**
Circunscr. 3	26000	18000	16000	**6**
Circunscr. 4	29400	25200	26000	**6**
Totales	**10**	**8**	**7**	25

Supongamos que ahora deseamos usar el método de Sainte-Laguë (por ser imparcial) para distribuir los escaños de cada partido entre las 4 circunscripciones. En primer lugar distribuimos con Sainte-Laguë los 10 escaños de P_1 en proporción a sus votos, que están en la primera columna. Después hacemos lo mismo con los otros dos partidos. El resultado está en la Tabla 9.

Tabla 9. Distribución de los escaños de los partidos entre las circunscripciones

	P_1	P_2	P_3	Totales
Circunscr. 1	3	2	1	
Circunscr. 2	2	2	3	
Circunscr. 3	2	2	1	
Circunscr. 4	3	2	2	
Totales	**10**	**8**	**7**	25

Si sumamos por filas, observamos que ninguna circunscripción ha recibido la representación establecida en la tabla 8. La primera ha obtenido 6 escaños en lugar de 7, la segunda 7 escaños en lugar de 6, la tercera tendría 5 escaños en lugar de 6 y la cuarta 7 en lugar de 6.

Si hubiésemos distribuidos los escaños de cada circunscripción entre los partidos en proporción a los votos en esa circunscripción, se cumplirían las restricciones para las circunscripciones, pero en este caso los partidos recibirían 9-8-8 escaños respectivamente, con lo cual faltaría un escaño al primero que lo habría recibido de más el tercero.

En el primer caso habíamos aplicado un factor a cada columna y redondeado al entero más próximo. Los factores de las columnas se elegían de forma que la suma de los redondeos coincidiera con los escaños que debía recibir el partido correspondiente. En el segundo caso hicimos el mismo proceso con las circunscripciones.

La biproporcionalidad consiste en aplicar simultáneamente factores a las filas y las columnas para conseguir que cuadren las representaciones de los partidos y los tamaños de las circunscripciones. Estos factores no se obtienen de forma fácil, sino que se requiere usar un ordenador.

En nuestro caso si dividimos todos los votos que aparecen en la Tabla 7 por 10000 y además aplicamos los siguientes factores:

Fila 1ª: 1.05, Fila 2ª: 0.80, Fila 3ª: 0.97, Fila 4ª: 0.80, Columna 3ª: 0.95

se obtienen las fracciones que aparecen en la Tabla 10.

Tabla 10. Fracciones tras aplicar los unos factores para el reparto biproporcional

	P_1*1	P_2*1	P_3*0.95
Circunscr. 1 *1.05	3.40	2.27	1.53
Circunscr. 2 * 0.80	2.21	1.92	2.19
Circunscr. 3 * 0.97	2.52	1.75	1.47
Circunscr. 4 * 0.80	2.35	2.01	1.98

Cuyos redondeos al entero más próximo aparecen en la Tabla 11, donde se puede observar que verifican la doble restricción respecto a los totales de los partidos y a las circunscripciones. Este es el reparto biproporcional.

Tabla 11. Reparto biproporcional correspondiente a los datos de la Tabla 7

	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Totales
Circunscr. 1	3	2	2	**7**
Circunscr. 2	2	2	2	**6**
Circunscr. 3	3	2	1	**6**
Circunscr. 4	2	2	2	**6**
Totales	**10**	**8**	**7**	25

La biproporcionalidad es la técnica más reciente para reparto de escaños. Ya la usan en varios cantones de Suiza, pero en general los políticos son muy reacios a aceptarla porque requiere usar un ordenador y un programa para calcular el reparto de escaños. Hay un programa gratuito de uso público para hacer repartos biproporcionales, se denomina BAZI y puede ser descargado de la página de Friedrich Pukelsheim.

7. Barreras electorales

En términos generales una barrera electoral tradicional consiste en establecer un porcentaje de votos que debe superar un partido para participar en la asignación de escaños. En España la barrera para el Congreso de los Diputados es un 3% y se exige a nivel de circunscripción electoral. Esta barrera carece de interés en todas las circunscripciones salvo en Madrid y Barcelona, porque las restantes circunscripciones tiene menos de 20 escaños y en ese caso el método D'Hondt no asigna ningún escaño a un partido con menos del 3% de los votos, incluso ni con el 4%.

La mayoría de los países establecen una barrera porcentual con respecto a los votos totales de los partidos, y suele ser el 4% o el 5%. En Alemania se exige un 5% y en las elecciones de 2013 quedaron dos partidos unas décimas por debajo del 5% con lo cual no recibieron ningún escaño. Eso hizo que el partido de Ángela Merkel tuviese una prima superior a la obtenida por el PP en España en 2011, a pesar de que el sistema electoral alemán suele ser de los más proporcionales del mundo.

Lo que ocurre con las barreras porcentuales, usadas tradicionalmente, es que usan una discontinuidad de salto a la hora de transformar los votos para optar al reparto de escaños. Multiplican por cero los votos de los partidos cuyo porcentaje es inferior a la barrera y por 1 los restantes. Sin embargo existen infinidad de formas de transformar los votos usando una función continua.

Una de las más sencillas consiste en fijar un valor r y transformar los votos v_i del partido i en w_i de la siguiente forma: $w_i = \text{máx}(0, v_i - r)$. El valor r es una decisión política, lo mismo que lo ha sido establecer un porcentaje u otro como barrera. Además, en lugar de elegir un valor determinado puede establecerse en función de los resultados de la elección. Por ejemplo r puede ser el 1.5% de los votos totales válidos.

Usando este tipo de barrera, que consiste en aplicar una reducción idéntica a los votos de todos los partidos (salvo que tengan menos de r votos), si dos partido se diferencian en pocos votos sus votos reducidos se diferencian lo mismo que los votos reales o menos. Por tanto se evitan las faltas de equidad en el reparto. La Tabla 12 contiene los datos de la elección al Bundestag en Alemania en 2013 junto con los resultados de aplicar una reducción equivalente al 1.5% en lugar de la barrera actual del 5%. Así pues en este caso r = 437268.56*1.5/100 = 655903.

Tabla 12. Elecciones al Bundestag de Alemania en 2013 con una barrera continua

Partido	Votos	%Votos	Actual	Votos - r	Propuesto
UDC/USC	18165446	41,54	311	17509543	296
Socialdem.	11252215	25,73	193	10596312	179
Izquierda	3755699	8,59	64	3099796	52
Alianza90	3694057	8,45	63	3038154	51
Democrat.	2083533	4,76	-	1427630	24
Altern. por	2056985	4,70	-	1401082	24
Pirata	959177	2,19	-	303274	5
Nac. Dem.	560828	1,28	-	0	0
Vot. libres	423977	0,97	-	0	0
Otros	774939	1,78	-	0	0
Totales	43726856	100	631		631

El sistema electoral alemán busca, entre los partidos que superan la barrera del 5%, una alta proporcionalidad tanto a nivel nacional como a nivel de los Lander; ello le obliga a elevar en ocasiones el tamaño del parlamento, que por defecto es de 598 diputados, a una cantidad superior (en 2013 fue 631).

Observamos, con la reducción de 655903 votos, que los dos partidos que quedaron a unas décimas del 5% obtendrían 24 escaños cada uno.

La falta de equidad que puede provocar el sistema electoral alemán se habría puesto más de manifiesto si un millón y medio de los votantes de Alianza 90 hubiesen votado a los partidos minoritarios (englobados en “Otros”) . En ese caso Alianza90 recibiría 39 escaños y los liberales ninguno a pesar de que ambos partidos, y también Alternativa por Alemania, tendrían casi los mismos votos.

8. Comentarios bibliográficos

En [1] se encuentra una historia del reparto de los escaños en los EEUU entre los estados de la Unión a lo largo de toda su historia y un apéndice que contiene las propiedades de los diferentes métodos de reparto proporcional y las paradojas del método de Hamilton.

En [2] dispone de bastante información de métodos de reparto proporcional y con proporcionalidad decreciente.

En [3] se analiza el sistema electoral del Congreso de los Diputados y se hacen comparativas con otros sistemas electorales; también contiene una propuesta de reforma del sistema electoral del Congreso de los Diputados.

En [4] puede consultar los datos electorales de todas las elecciones generales, europeas y municipales celebradas en España a partir de 1977.

En [5] puede consultar datos electorales de un gran número de países.

En [6] se encuentra el BAZI para hacer repartos biproporcionales.

Bibliografía

[1] Balinski, M.L. and Young P. (2001), Fair representation. Meeting the Ideal One Man One Vote, Brooking Institution Press

[2] Pukelsheim F. (2013), Proportional Representation. Apportionment Methods and Their Applications, Springer.

[3] Ramírez V. y otros (2013), Sistema Electoral para el Congreso de los Diputados, propuesta para un Parlamento más ecuánime, representativo y gobernable. Editorial de la Universidad de Granada.

[4] http://www.infoelectoral.interior.es/min/busquedaAvanzadaAction.html, página del ministerio del interior con los resultados electorales.

[5] http://www.electionresources.org/

[6] http:// www.uni-augsburg.de/pukelsheim