Intervenciones con alumnos de primer ciclo de ESO en las que se moviliza el razonamiento proporcional

Miguel Ángel Baeza Alba, Zulema Saiz Sainz, Nuria Joglar Prieto, Andrés Díaz Jiménez, José María Sordo Juanena

Email: mbaeza@ucm.es; zulema.saiz@educa.madrid.org; nuria.joglar@urjc.es; andres.diaz@educa.madridl.org; jmsordoj@ucm.es

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid

Departamento de Matemáticas Colegio Liceo San Pablo, Leganés, Madrid

Departamento de Matemáticas IES Jaime Ferrán Clúa, San Fernando de Henares, Madrid

Área Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid

Departamento de Matemáticas IES Alpajés, Aranjuez, Madrid

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En esta comunicación se describen y analizan tres intervenciones con alumnos del primer ciclo de ESO en las que se busca la movilización del razonamiento proporcional. El objetivo de este trabajo es doble: por un lado, se pretende constituir un equipo multidisciplinar formado por profesores de secundaria de matemáticas y por formadores de maestros y profesores del Máster de Secundaria de Matemáticas; y por otro, diseñar y llevar al aula unas primeras actividades sobre el razonamiento proporcional que permitan iniciar juntos una reflexión sobre las limitaciones del lenguaje que tienen los alumnos y que pueden dificultar su construcción del conocimiento matemático, y por lo tanto, afectar a la modelización de situaciones problema en diferentes contextos de la vida cotidiana. También analizamos, el uso de cuantificadores semánticos que tienen la finalidad de reconocer el tipo de problema del que se trata y el abuso de la regla de tres que más que ser una ayuda se convierte en un factor negativo, provocando en muchos alumnos un obstáculo didáctico.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento proporcional, transición primaria-secundaria, modelización, comunicación, registros de representación.

Introducción

Varios estudios de finales del siglo pasado han demostrado que muchos jóvenes y adultos tienen en ocasiones serias dificultades para resolver problemas de su vida cotidiana en los que es necesario movilizar el razonamiento proporcional [véase “Ideas Introductorias” en el trabajo de S. Mochón Cohen, 1]. Trabajos más recientes sobre el tema, como el de Ramírez y Block [2], argumentan que las ideas de proporcionalidad pueden ser mal entendidas, en gran parte, debido al abuso de la “regla de tres” y a la manera mecánica y descontextualizada en la que se aborda este tema en general con estudiantes de entre 9 y 14 años (finales de la Educación Primaria y en el Primer Ciclo de la Educación Secundaria en nuestro país).

El razonamiento proporcional es una de las ideas más importantes dentro de las matemáticas. Según el capítulo titulado precisamente “Proporcionalidad”, del Manual para el Estudiante “Matemáticas y su Didáctica para Maestros” de los profesores Juan D. Godino y Carmen Batanero [3], con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento, supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución (el problema se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero), con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin dar sentido a lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en lasque es innecesaria o incluso no pertinente.

En la actualidad, en nuestro país la proporcionalidad empieza a abordarse en la Educación Primaria. Su tratamiento aparece tanto explícitamente como implícitamente en el Currículo Básico de la Educación Primaria. A continuación citamos varios estándares de aprendizaje evaluables según el Real Decreto 126|2014, de 28 de febrero, por el que se establece el Currículo Básico de la Educación Primaria [4]:

> Área de Matemáticas (pág. 19386-19393). Estándares de aprendizaje evaluables.
>
> Bloque 2. Números.
>
> 7.4. Usa la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria.
>
> 7.5. Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
>
> 5.2. Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y resolución de problemas.
>
> 6.3. Resuelve problemas utilizando la multiplicación para realizar recuentos, en disposiciones rectangulares en los que interviene la ley del producto.
>
> 6.9. Calcula porcentajes de una cantidad.
>
> 7.1. Utiliza los porcentajes para expresar partes.
>
> 7.3. Calcula aumentos y reducciones porcentuales.
>
> 8.5. Construye y memoriza las tablas de multiplicar.
>
> 8.6. Identifica múltiplos y divisores usando las tablas de multiplicar.
>
> 8.11. Calcula tantos por ciento en situaciones reales.
>
> Bloque 3. Medida
>
> 3.3. Compara y ordena medidas de una misma magnitud.
>
> 4.1. Conoce y utiliza las equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen.

4.3. Resuelve problemas utilizando las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito el proceso seguido.

7.1. Conoce la función, el valor y las equivalencias entre las diferentes monedas y billetes del sistema monetario de la Unión Europea, utilizándolas tanto para resolver problemas en situaciones reales como figuradas.

Bloque 4. Geometría

1.7. Realiza ampliaciones y reducciones.

3.2. Aplica los conceptos de perímetro y superficie de figuras para la realización de cálculos sobre planos y espacios reales para interpretar situaciones de la vida diaria.

6.1. Comprende y describe situaciones de la vida cotidiana e interpreta y elabora representaciones espaciales (planos, croquis de itinerarios, maquetas,…), utilizando las nociones geométricas básicas (situación, movimiento, paralelismo, perpendicularidad, escala, simetría, perímetro, superficie).

El razonamiento proporcional aparece, como vemos explícitamente, en el Bloque 2 (Números);tanto de manera directa como desde la resolución de problemas donde la comunicación destaca también como aspecto central. También aparece con importancia en el Bloque 4 (Geometría); se tratan diferentes aspectos a través de trabajos en el espacio sensible de reproducción: agrandamiento y reducción de un dibujo. En ese bloque, aparece también explícitamente la palabra “escala”. Además, como observamos en el estándar 7.5. del Bloque 2 (Números), aparece también la “Regla de tres”.

Sin embargo, en la práctica, el razonamiento proporcional no aparece en general de manera sistemática, desde la resolución de problemas contextualizados, en la escuela Primaria. Es en los dos primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) cuando aparece como tema a tratar explícitamente. En concreto, citamos a continuación algunos de los estándares de aprendizaje evaluables en el área de Matemáticas del primer ciclo de la ESO (alumnos entre 12 y 14 años), tal y como aparecen en el reciente Real Decreto 1105|2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato [5].

Área de Matemáticas (Sec. I pág. 407-413). Estándares de aprendizaje evaluables.

Bloque 2. Números y Álgebra.

2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas.

5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son ni directa ni inversamente proporcionales.

Bloque 3. Geometría.

4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

Bloque 4. Funciones.

4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

De nuevo podemos observar la importancia del razonamiento proporcional en los estándares de evaluación de Matemáticas para los alumnos de primer ciclo de la ESO. De hecho, es en esta etapa donde los alumnos tienen que dar un paso más hacia la abstracción, para pasar de las relaciones puramente numéricas o geométricas al inicio de las relaciones funcionales en el Bloque 4.

Siendo conscientes de las dificultades que el aprendizaje del razonamiento proporcional conlleva, y teniendo presente las especificaciones de los currículos oficiales de matemáticas comentadas en los párrafos anteriores, hemos formado un grupo multidisciplinar constituido por dos profesores de secundaria en activo, un profesor de secundaria que además es formador de maestros, y dos especialistas en didáctica de las matemáticas, formadores de maestros además de profesores del Máster de Formación del Profesorado de secundaria. Nuestro objetivo ha sido diseñar unas actividades iniciales y llevarlas al aula, para tratar de aportar unas primeras reflexiones sobre cómo afrontar el tema de proporcionalidad con alumnos de entre 12 y 14 años, a partir de sus respuestas. Las actividades desarrolladas tienen la finalidad de ayudar a los alumnos a superar las dificultades que se les presentan a la hora de modelizar la proporcionalidad y que son relativas a la linealidad, la razón de proporcionalidad y su campo numérico, la escala y el porcentaje.

En concreto, se diseñaron tres actividades en tres contextos diferentes, dentro del Bloque de Geometría, y cada una de ellas fue propuesta a un grupo diferente de alumnos de entre 12 y 14 años de tres centros diferentes de la Comunidad de Madrid. En esta comunicación presentamos las actividades y ofrecemos unos primeros análisis de su puesta en el aula.

En las actividades elegidas para llevar al aula, nos hemos centrado en los tres siguientes aspectos:

En primer lugar, y para facilitar la transición de primaria a secundaria, el trabajo tenía que estar muy conectado a situaciones-problema en contextos diferentes y en un espacio sensible, pero sin limitarnos a trabajar con los alumnos en representaciones en el micro-espacio (espacio de las interacciones ligadas a la manipulación de objetos pequeños, como se da cuando se trabaja con lápiz y papel). Estas últimas representaciones podrían estar afectadas por nuestras expectativas como profesores y seguramente estarían desconectadas de las realizadas anteriormente en Primaria, donde se trabaja más en el meso-espacio (espacio de los desplazamientos del sujeto; espacio que contiene un inmueble) [6, p. 242].

En segundo lugar, y de nuevo para facilitar la transición de primaria a secundaria, en las actividades propuestas hemos hecho especial hincapié en la modelización y en la aparición de representaciones diferentes del objeto matemático a tratar (ostensiones) [7]. Es muy importante promover la aparición de diferentes registros de representación de objetos matemáticos [8], facilitando el paso de uno a otro, con el objetivo final de desarrollar en el alumno lo que algunos autores, como el profesor Star y sus colegas en EEUU [9], llaman "flexibilidad matemática"; de manera que al final el alumno sepa elegir la representación y la estrategia de resolución mejor para cada situación planteada. Se ha dado especial importancia en nuestras actividades a la manipulación, como hemos mencionado en el párrafo anterior.

En tercer y último lugar, hemos diseñado las tareas de manera que provoquen en el alumno la necesidad de la comunicación. El lenguaje, tanto verbal como escrito, aparecerá como una representación más del objeto matemático (este último aspecto está pues íntimamente relacionado con el anterior). Para favorecer el proceso de comunicación, las situaciones planteadas serán un reto para los alumnos, y ellos serán los responsables de resolverlas, de formular sus resultados y conclusiones, y de validarlos con sus compañeros tanto oralmente como por escrito. De esta manera, enmarcamos nuestro trabajo dentro del marco teórico francés de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau [10]. Por tanto, en un escenario como el nuestro, el dominio del lenguaje se revela imprescindible, ya que la comparación de los elementos que intervienen en la situación didáctica con la imagen mental que tiene el alumno se realiza en forma de debate donde se requiere verbalización y justificación. Será mediante la manipulación, a través de la aparición de diferentes representaciones y mediante el uso de la comunicación como los alumnos irán caminando hacia la abstracción del razonamiento proporcional.

Nosotros hemos contextualizado la situación didáctica(el tiempo escolar, el conocimiento a enseñar, el papel del profesor y del alumno en el aula)y seleccionando los verbos y sus tiempos(realizar acciones, reflejar cercanía). Nos parece muy pertinente la frase de Wittgenstein, L:

"*Los límites del lenguaje son los límites del pensamiento.*"

Los límites del lenguaje, y por lo tanto, límites del pensamiento del alumno de estas edades, van a estar afectados por las expectativas del profesor, las limitaciones propias de su lenguaje para la comunicación de la situación y todas las condiciones necesarias para la validación de sus respuestas.

El resto de la comunicación se organiza de la siguiente manera:

En primer lugar describimos las tres intervenciones realizadas en el aula. Para cada una de ellas se detallarán los participantes, el contexto, el contenido de las sesiones, y se ofrecerán unos primeros análisis de los resultados.

En segundo lugar, incluiremos una discusión de los resultados de las tres intervenciones, siempre desde los aspectos de la modelización, las representaciones de los alumnos y la comunicación desarrollados en esta introducción.

Para terminar estableceremos nuestras primeras conclusiones y ofreceremos unas ideas para un trabajo futuro.

Metodología

En esta sección describimos las tres intervenciones que hemos realizado con tres grupos de alumnos del primer ciclo de la ESO de tres centros diferentes. Para cada una de las tres actuaciones, especificamos los participantes y su contexto, las fechas, duración y contenido, los datos obtenidos a partir de las observaciones en el aula y los resultados que los alumnos elaboraron oralmente y por escrito. También ofrecemos unos primeros resultados de cada intervención. Recordemos que el objetivo principal de nuestra propuesta es tratar de aportar unas primeras reflexiones sobre cómo tratar la proporcionalidad con alumnos de entre 12 y 14 años a partir de sus respuestas a las actividades planteadas.

Intervención en el Colegio Liceo San Pablo: *"Ampliación de un puzle"*

Participantes y contexto

Esta actividad se ha realizado en el Colegio Liceo San Pablo, un colegio concertado situado en la localidad de Leganés, provincia de Madrid. El colegio se encuentra en el barrio de la Casa del Reloj, un barrio de clase social media obrera.
La actividad se realizó en dos grupos de 2ºESO (grupos B y C), de 24 alumnos cada uno de ellos. Uno de los grupos (grupo C), está formado por alumnos académicamente mejores y con mejor actitud en clase que el otro grupo (grupo B).
Dos profesores se encargaron de "orquestar" la actividad, siendo ambos coautores de esta comunicación y profesores de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Uno de ellos, Miguel A. Baeza Alba, es además el profesor de matemáticas de los alumnos anteriormente mencionados.

Descripción de la intervención

La intervención se realizó el lunes 2 de marzo de 2015 y se llevó a cabo de la misma forma en los dos grupos.
En primer lugar se dividió la clase en 6 grupos de cuatro alumnos cada uno. No se tomó ningún criterio académico para la división, únicamente la colocación inicial de los alumnos en sus pupitres. A continuación, se repartió una ficha a cada uno de los grupos (véase Anexo 1) donde se puede observar un Puzle, cuyas piezas vienen acotadas con sus medidas reales en centímetros. Las seis piezas del Puzle vienen numeras del 1 al 6. Se asigna una pieza distinta a cada uno de los seis grupos y se les da la siguiente consigna:

> "Cada grupo debe construir la pieza que le ha sido asignada sabiendo únicamente que la longitud que vale 4 cm en el puzle inicial, debe valer 7 cm en el puzle final. Tenéis 40

minutos para realizar la tarea; tras esos 40 minutos, tendréis que entregarla, además de entregar un folio donde indiquéis todos los pasos que habéis seguido para su fabricación."

Los alumnos trabajaron durante los 40 minutos pactados en la fabricación de la pieza. Los profesores que nos encontrábamos en el aula no dimos ningún tipo de pista para la fabricación de la misma. Cuando el tiempo finalizó, los alumnos entregaron su pieza, junto con el folio con la explicación de cómo lo habían resuelto, tal y como les habíamos pedido. Fue entonces cuando comenzó el periodo de validación conjunta sobre el proceso de fabricación de la pieza. Los profesores fuimos pegando las piezas en la pizarra con el fin de reproducir el puzle que les habíamos dado (agrandado). A la vez que pegábamos las piezas, íbamos preguntando a cada grupo cómo habían fabricado la misma y detectando deficiencias en las construcciones y recogiendo las dificultades que los alumnos habían ido encontrando. Paralelamente íbamos analizando con ellos a qué podían deberse estas deficiencias y dificultades, de forma que fueron los alumnos los que después de intercambiar distintos puntos de vista finalmente hicieron la validación de la situación didáctica propuesta. Posteriormente institucionalizamos el proceso correcto para fabricar un puzle a escala.

Cabe mencionar que los alumnos reaccionaron muy bien ante la actividad. En cuanto recibieron la consigna, todos se pusieron a trabajar en la pieza; cada grupo quería que su pieza fuese de las mejores. Algunos grupos, al principio, intentaban hacer preguntas para averiguar qué es lo que los profesores queríamos que hiciesen para elaborar su pieza; como no encontraron respuesta en nosotros, fueron ellos mismos los que ingeniaron sus propios métodos (algunos correctos y otros incorrectos) para llegar a completar la tarea que se les había propuesto. Todos colaboraron e intervinieron también en la fase de validación conjunta.

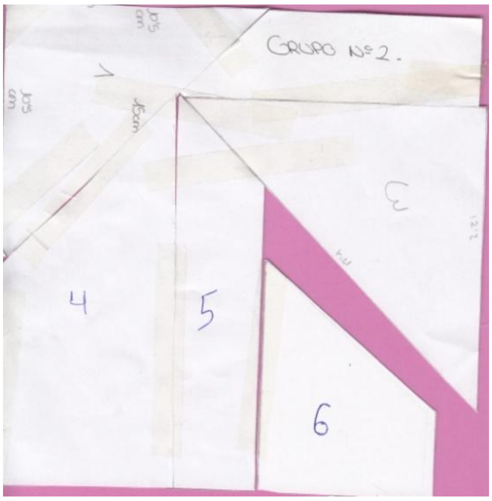
Como se ha comentado anteriormente en la introducción de esta comunicación, este trabajo lo hemos articulado desde el marco teórico de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Guy Brousseau [10]. Este marco teórico postula en líneas generales que el aprendizaje de las matemáticas se hace por descubrimiento. Es el propio alumno el que debe descubrir el conocimiento y validarlo por sí mismo (de manera individual o mejor cooperativa), siendo el profesor un mero guía en el proceso de aprendizaje. El profesor tiene además un papel fundamental en la institucionalización final del aprendizaje, que nunca se debe producir antes de tiempo. Esta actividad concreta del agrandamiento de un puzle fue propuesta y analizada por el profesor Brousseau en las *Escuelas Michelet* en Talence (Burdeos), abiertas en el año 1973 y dirigidas hasta el año 1988 por el propio Brousseau [11].

Datos

Se recogieron datos cualitativos mediante observación en el aula. Además de esto, se recogió de cada uno de los grupos un folio que debían entregar con los pasos que siguieron para la elaboración de la pieza, junto con la pieza elaborada agrandada "a escala".

Primeros resultados

Los resultados de los dos grupos fueron los siguientes:



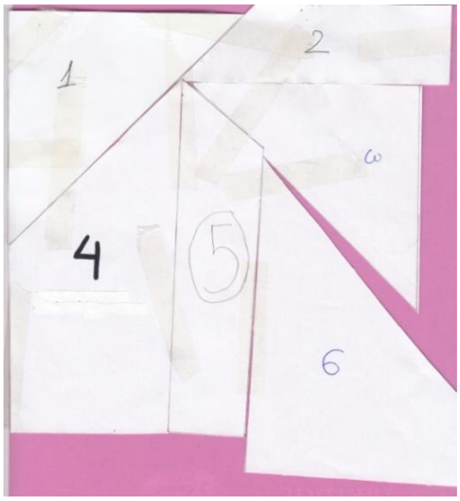


Figura 1 a. 2º ESO B

Figura 1 b. 2º ESO C

Es curioso observar cómo los alumnos del grupo académicamente peor, obtuvieron aparentemente mejor resultado en la elaboración del puzle; ya que como vemos en la Figura 1a, correspondiente al grupo de 2º B solo hay dos piezas que no han sabido reproducir a mayor tamaño.
A lo largo de la actividad, aparecieron referencias a: "regla de tres", "escala", "proporción directa",...

Pasamos ahora a analizar los resultados de alguno de los grupos en cada una de las dos clases. En la clase de 2º B, encontramos errores graves en la realización de la pieza 6, ya que el lado que debía medir 12,25cm, ellos los construyen a 9,25cm. Por otro lado, encontramos algún error leve en la realización de la pieza 3, ya que el lado que debía medir 12,25cm, mide 12,5cm. Las piezas 1, 4, 5 y 2 están prácticamente perfectas.
Mostramos a continuación los razonamientos seguidos para elaborar la pieza 2 (correctamente realizada) y la pieza 6 (incorrectamente realizada).

1º.- Tomamos la medida de la parte inferior de la figura número 2, la cual equivale a 7cm que tenemos que hayar a cuanto equivale si la medida que nos da la empresa es de 7 reales

2º.- Planteamos la solución en forma de regla de 3 y descubrimos que 7 equivale a 12'25.

3º.- Continuamos averiguando la parte superior de la pieza que equivale a 5cm y lo que vamos a hacer con ella es averiguar la medida real con la información que nos ha dado la empresa.

4º.- Descubrimos que esa medida equivale a 8'75cm reales y finalizamos con el diseño de la pieza real que nos ha encargado la pieza.

Figura 2. Respuesta completa del Grupo 2 (a cargo de la Pieza 2) 2º ESO B

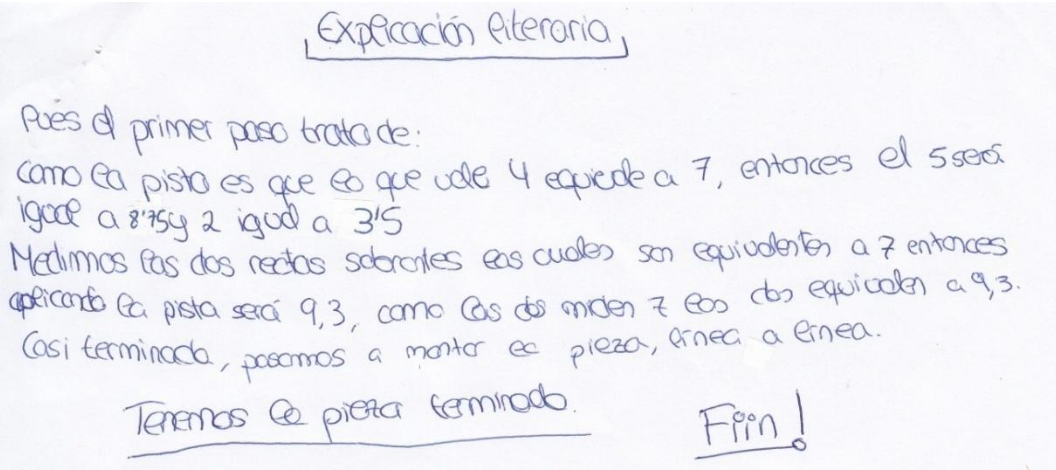


Figura 3. Respuesta completa del Grupo 6 (a cargo de la Pieza 6) 2º ESO B

Por otra parte, en la clase de 2º ESO C, encontramos errores graves en la realización de las piezas 1, 3 y 6. En el caso de la pieza 1, los alumnos tienen claro cómo se realiza, pero miden mal las longitudes. Los grupos encargados de realizar las piezas 3 y 6, no son capaces de encontrar la escala y, por tanto, calculan mal las longitudes de la pieza. La pieza 5 tiene un pequeño error, ya que no respeta la perpendicularidad de los lados, mientras que las piezas 2 y 4 están prácticamente perfectas.
Mostramos a continuación los razonamientos seguidos para elaborar la pieza 3 (mal realizada) y la pieza 4 (correctamente realizada).

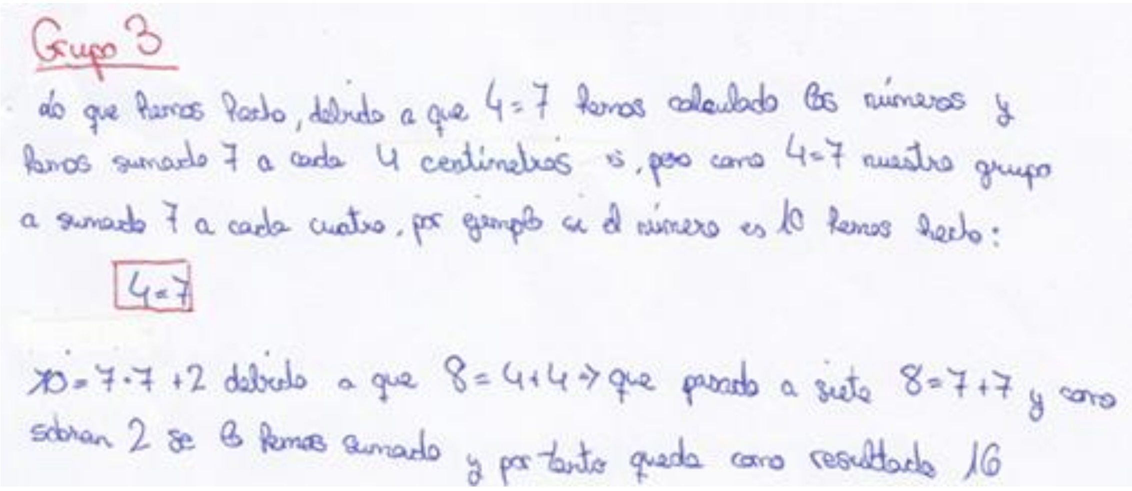


Figura 4. Respuesta completa del Grupo 3 (a cargo de la Pieza 3) 2º ESO C

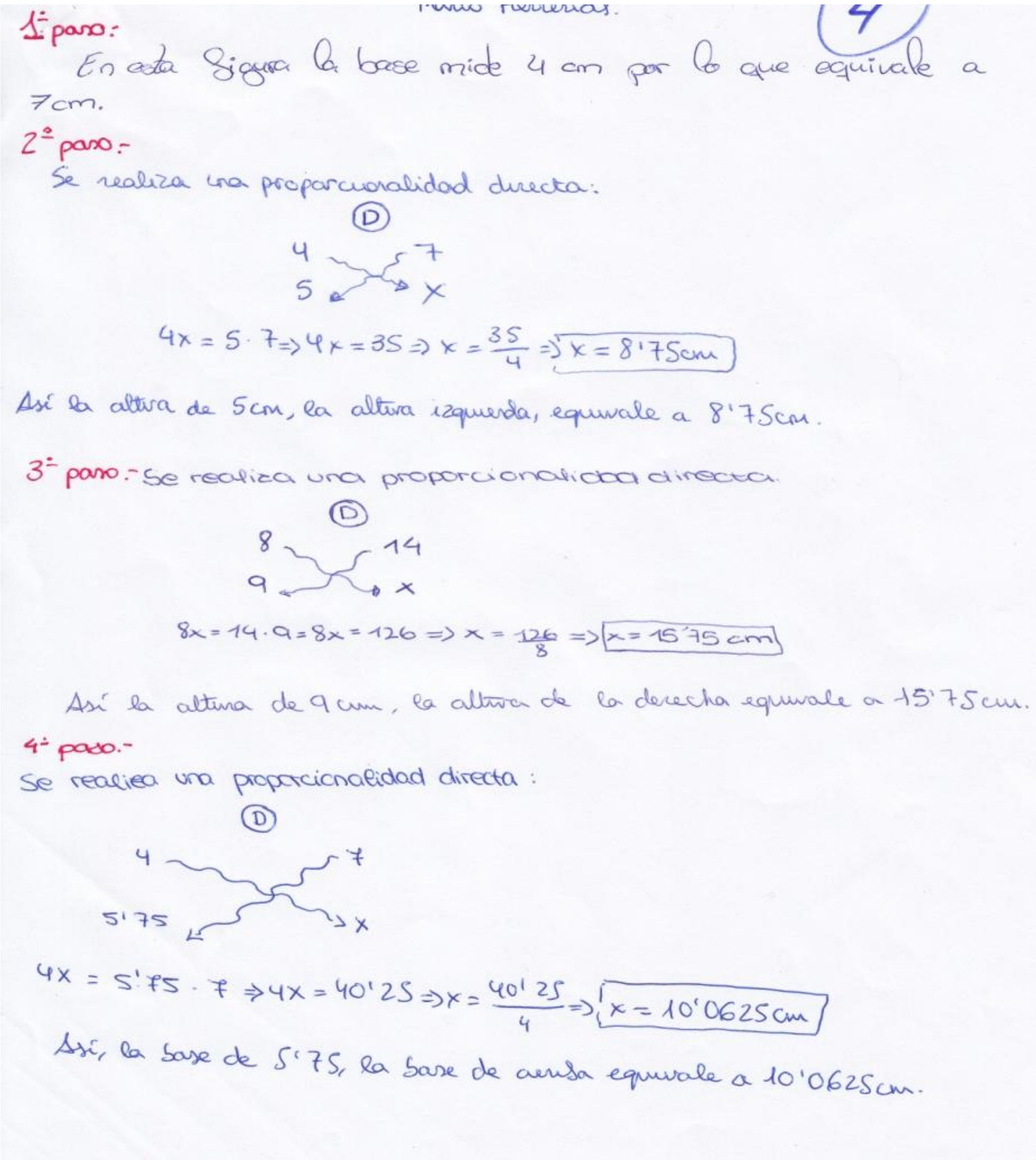


Figura 5. Respuesta completa del Grupo 4 (a cargo de la Pieza 4) 2º ESO C

Como podemos observar en la Figura 4 (pieza 3 de 2º ESO C), los alumnos creen que para construir una figura proporcional a otra, pero más grande, hay que sumar a cada lado la misma cantidad. No obstante, esta creencia no la llevan tampoco correctamente a la práctica. En la Figura 5 (pieza 4 de 2º ESO C), aparece la "regla de tres" para realizar los cálculos que necesitan. En este caso, efectúan las cuentas correctamente y reproducen bien la nueva pieza; no obstante, llama la atención cómo en el tercer paso utilizan la relación 8:14, en lugar de la 4:7. Pensamos que tiene que ver con la idea de tomar números consecutivos (cuando quieren calcular la medida equivalente a 5, usan la relación 4:7, sin embargo en el paso siguiente quieren ver la equivalencia del 9 y por eso usan 8:14). Esto denota que el proceso de abstracción todavía no ha sido completado.

En general las dificultades presentadas por los alumnos son debidas a una mala construcción de los números racionales. Algunos también tienen problemas relacionados con la medida de magnitudes continuas como es el caso de la longitud y en ocasiones no detectan la necesidad de respetar la semejanza.

Intervención en el IES Alpajés: *“El plano de la clase y sus muebles”*

Participantes y contexto

El IES Alpajés es un centro ubicado en la localidad de Aranjuez (Comunidad Autónoma de Madrid). El centro ofrece enseñanzas de Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional (Hostelería y Turismo). Además también ofrece desde 1º a 3º de ESO enseñanza bilingüe. Es un centro con 6 grupos de 1º ESO y 2º ESO (3 son de sección bilingüe y 3 de programa bilingüe), 6 grupos de 3º ESO,(2 de la sección bilingüe y 4 de programa bilingüe) y 5 grupos de 4º de ESO. El tipo de alumnado que asiste al centro es muy homogéneo, siendo en su mayoría de clase media, muy apoyado en casa.

La actividad que vamos a describir se desarrolla en un grupo de 19 alumnos de 1º ESO del Programa Bilingüe (alumnos con todas sus enseñanzas en castellano, salvo una asignatura, y que tienen además dos horas más de clase de la asignatura de inglés). El grupo es muy uniforme, con una única alumna de compensatoria. El rendimiento escolar de los alumnos es bueno; varios alumnos del grupo sacan muy buenas notas, aunque en general, son poco trabajadores.

Descripción de la intervención

La actividad se desarrolló en dos sesiones de 45 minutos cada una, los días 24 y 26 de febrero de 2015 en el aula normal del grupo.

A la primera sesión asistieron 18 alumnos. Se dividieron en 4 grupos de trabajo y se les entregó una ficha con un plano del aula y de la planta del edificio donde se encuentra dicha aula (obtenido del plan de evacuación del centro) sin las escalas (Figura 6). Para formar los grupos no se tuvieron en cuenta criterios académicos; sencillamente se respetó la colocación de los alumnos en el aula. En la clase, además del profesor de Matemáticas del grupo, Andrés Díaz Jiménez, se encontraron otros dos miembros del equipo autor de esta comunicación, quienes ayudaron a organizar la sesión y a observar lo ocurrido para poder triangular la información a la hora de discutir los resultados. Para empezar la sesión, se explicó verbalmente a los alumnos la actividad que tenían que realizar. El profesor de Matemáticas nombró un secretario en cada grupo. El contexto de la actividad era el siguiente:

> “Juan Carlos, el director de vuestro instituto, tiene hacer un inventario del mobiliario del centro para enviarlo a la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid con el objetivo de que allí valoren las necesidades materiales de vuestro centro en los próximos años. Le han dado solamente una semana para hacerlo, pues este viernes, último día lectivo del mes de febrero, tiene que enviar la documentación de manera oficial. Ante la premura de la tarea, Juan Carlos ha decidido pedir ayuda a los profesores y alumnos del centro para hacer el inventario de las aulas de la ESO.”

La consigna se les dio también por escrito (véase Anexo 2 para más detalles) y decía así:

> “Andrés ha pensado que lo mejor es colocar en el siguiente plano (obtenido a partir del *Proyecto de Autoprotección del centro*), todos los muebles que hay en vuestra clase. Hay que colocarlos de manera que Juan Carlos pueda averiguar las medidas reales (excepto la altura) de cada uno, así como las distancias entre ellos. Tenéis 30 minutos para ayudar a Andrés en esta tarea.”

En la consigna no aparecían las palabras: escala, proporcionalidad, porcentaje, fracción, ni razón. Se les dejó utilizar reglas, una cinta métrica de 8 metros, por si aparecía la necesidad de medir el aula, papel y lápiz. Al acabar se recogieron las respuestas que los alumnos dieron por escrito y durante la sesión se tomaron notas del trabajo que iban haciendo en los diferentes grupos. Aunque no dio tiempo a realizar la validación de la sesión ese día, los alumnos sí que pudieron dedicar unos minutos finales a realizar una pequeña discusión guiada por uno de los autores en la que los secretarios de cada grupo explicaban oralmente lo que habían hecho.

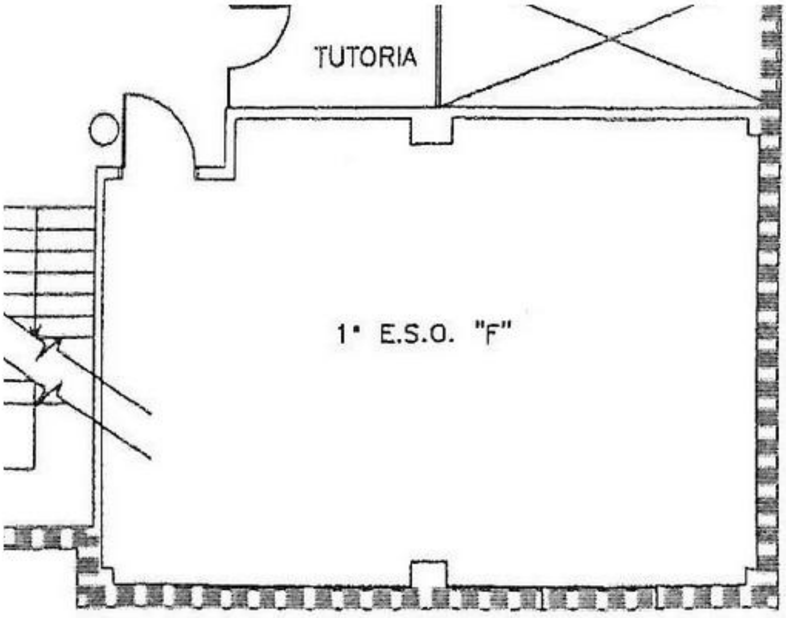


Figura 6. Plano del aula a los alumnos (Sesión 1, Intervención IES Alpajés).

En la segunda sesión el profesor estuvo solo con los alumnos, y realizó la validación de la sesión anterior. Como ninguno de los grupos fue capaz de calcular la escala en la sesión 1, y por tanto, ninguno de los grupos fue capaz de completar adecuadamente la tarea requerida, el profesor dio pequeñas indicaciones para completar la actividad de la primera sesión. Después se propusieron dos ejercicios que se proyectaron en la pizarra digital. De esta manera, se explicó el concepto de escala utilizando el trabajo de la sesión anterior y se practicó con una fotografía de un estadio de fútbol en una construcción de GeoGebra [12] y sobre un mapa de Aranjuez extraído de *Google maps* [13] para que calcularan la longitud de una calle de la localidad. Se eligieron estos ejercicios para que utilizaran el concepto de escala en otros contextos; concretamente, en una fotografía y en un mapa. Describimos estos dos ejercicios a continuación:

En el primero, el profesor elaboró una construcción en GeoGebra con una fotografía del estadio Santiago Bernabéu en la que había dibujado segmentos sobre la escala de la fotografía y sobre la anchura, altura y diagonal del campo (véase Figura 7). Se les pidió que calculasen la anchura real del campo.

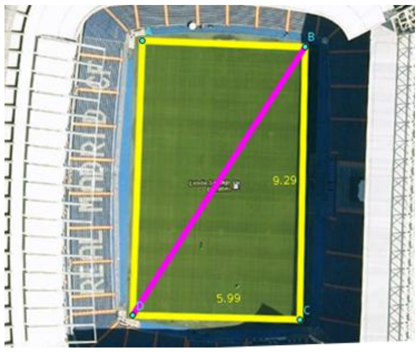


Figura 7. Ejercicio 1 (Sesión 2, Intervención IES Alpajés).

En el segundo ejercicio, el profesor proyectó en la pizarra el mapa de Google maps y se les propuso que calcularan la medida real de la *Calle de la Reina*, una calle recta y larga de Aranjuez que aparecía en el mapa proyectado (véase Figura 8). Dos alumnos midieron en la pizarra la escala y la calle y los alumnos hicieron los cálculos.

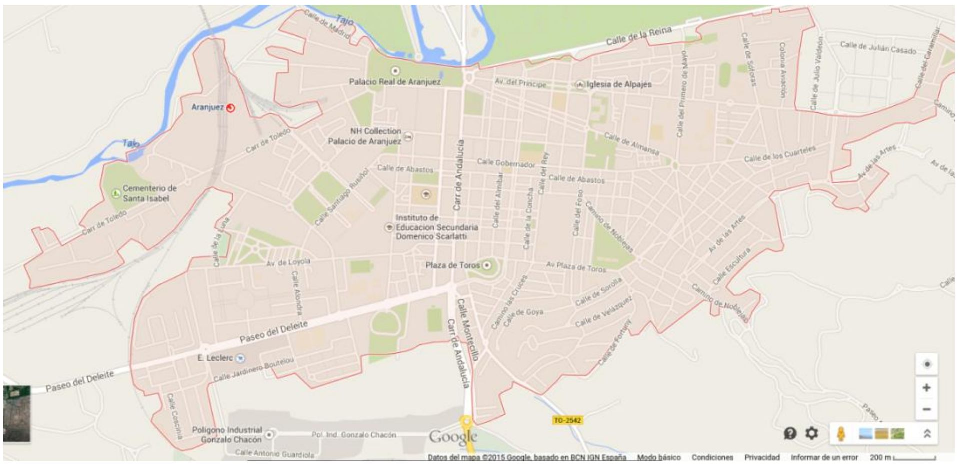


Figura 8. Ejercicio 2 (Sesión 2, Intervención IES Alpajés).

Datos

Se recogieron datos cualitativos mediante la observación en el aula durante ambas sesiones. Así, en la primera sesión, tanto el profesor de matemáticas, como los otros dos guías de la sesión, coautores los tres de esta comunicación, se movieron por el aula entrevistando oralmente a todos los participantes. Se grabaron en vídeo algunos fragmentos, y dicho vídeo fue analizado posteriormente. Además, se recogieron las respuestas que los alumnos dieron por escrito a las tareas propuestas.

Primeros resultados

La primera sesión se desarrolló en un muy buen clima de trabajo, los alumnos estuvieron muy interesados y participaron muy activamente. Es importante destacar en este punto que en la semana anterior se habían trabajado en clase algunos conceptos del tema de proporcionalidad: razón, proporción, porcentajes, regla de tres simple y regla de tres compuesta; eso sí, sin hablar en ningún momento de la escala. La mayoría de los grupos midieron las mesas de los alumnos y la mesa del profesor, otros grupos midieron la clase y estimaron el área de la misma (Figura 9), otro grupo contó el número de baldosas que había en suelo para tratar de estimar el valor del área del aula y para ello con tiza numeraron las baldosas a lo ancho y a lo largo. A ningún grupo se le ocurrió medir la anchura de la clase y compararla con la anchura de la clase en el plano para obtener la escala. Tampoco se les ocurrió conservar la proporcionalidad de las mesas a la hora de dibujarlas, todos los dibujos eran aproximados. Solamente destacamos el caso de una alumna: al dibujar la mesa de los alumnos, de dimensiones 70 cm por 50 cm, ladibujó inicialmente con dimensiones 1 cm por 0,5 cm; finalmente lo cambió a 0,7 cm por 0,5 cm, pero sin calcular la escala del aula, solamente plasmó en su dibujo la proporcionalidad de las dimensiones de la mesa.

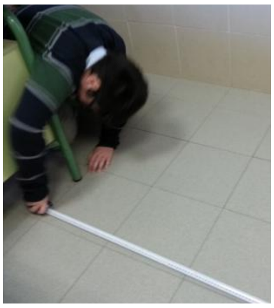


Figura 9. Alumno Grupo 2 (IES Alpajés).

Al acabar recogimos las respuestas de los grupos que resumimos ahora a continuación.

Grupo número 1. Dio las medidas de la clase, el área de la clase, las dimensiones de las mesas de los alumnos y del profesor; también calcularon las áreas reales de dichas mesas, pero dibujaron el mobiliario en el plano sin tener en cuenta la proporcionalidad. Indicaban la medida de cada objeto con una leyenda en el plano y colocaban “a ojo” los muebles en su dibujo con tamaños aproximados, pero no a escala.

Grupo número 2. Dio las medidas de los muebles de la clase, el número de baldosas y el área de la clase.

Grupos 3 y 4. Únicamente dibujaron los muebles y dieron las medidas de la mesa del profesor.

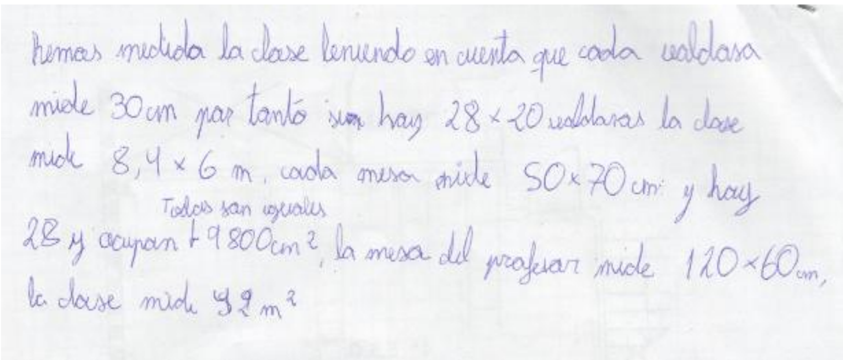


Figura 10. Respuestas Grupo 1.

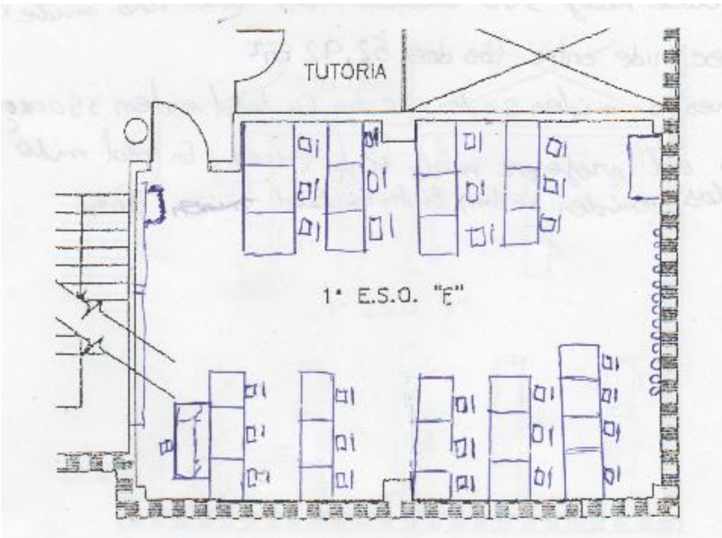


Figura 11. Dibujo Grupo 1.

Es posible que la falta de una buena modelización en la primera actividad se debiera a que esta actividad era demasiado abierta y los alumnos no están acostumbrados a este tipo de trabajo en general. Tal vez el tipo de preguntas que se proponen a los alumnos debería haber sido más concreto para que al final hubieran llegado a la necesidad de usar el concepto de escala, que por otra parte ya manejan, aunque dentro de un contrato didáctico diferente (en otras asignaturas, como Geografía). Ellos entendían que debían resolver las situación problema planteada haciendo un dibujo “a ojo” en el que solamente debían plasmar qué número de muebles había de cada tipo (Figura 11), acompañado de una “leyenda” en la que daban con texto las medidas de cada uno de los tipos de muebles dibujados (Figura 10). Al observar estas respuestas, nos dimos cuenta de que en la consigna que les habíamos dado no quedaba claro que no se pudiera resolver la tarea así (aunque específicamente se pidiera el dibujo). Además, otro problema que detectamos durante esa sesión fue que había poco tiempo, solo 45 minutos no fueron suficientes para la respuesta de los alumnos.

Lo que sí parece claro es que el trabajo de la primera sesión ayudó a que los alumnos movilizaran su razonamiento proporcional: el hecho de medir la clase y compararla con las medidas del plano les hizo ver que las medidas de figura del plano eran proporcionales a las medidas reales de clase. De esta manera, los alumnos descubrieron que el saber matemático de proporcionalidad les permitía resolver un problema. Los ejercicios del cálculo de la longitud del estadio y de la longitud de una calle de Aranjuez sirvieron para afianzar los conceptos explicados. Para finalizar, cabe destacar la aparición de la necesidad de medir áreas en las estrategias de todos los grupos. Pensamos que se puede deber al contrato didáctico [11]: en el bloque de Geometría, tanto en el tercer ciclo de Primaria, como en el trabajo en los meses anteriores con su profesor, el énfasis siempre se había dado a la medida de superficies.

Intervención en el IES Jaime Ferrán de Clúa: *"Trabajando con cuerdas"*

Participantes y contexto

Esta última actividad se ha realizado en el IES Jaime Ferrán Clúa, un instituto público situado en la localidad de San Fernando de Henares, provincia de Madrid. La zona está formada por familias de clase social media-alta, aunque cuenta con una pequeña parte de edificios de protección social con alguna familia en riesgo de exclusión social.

La actividad se realizó en un grupo de 2ºESO de 24 alumnos. Uno de los alumnos, de origen marroquí, lleva un año en España, por lo que tiene problemas con el idioma y un nivel académico inferior al del grupo. También hay una alumna con necesidades educativas especiales. A ambos se les integró en un mismo grupo.

El rendimiento escolar de los alumnos es muy bueno; son participativos, trabajadores y muestran un gran interés por todo tipo de actividades extra curriculares.

Los profesores que se encargaron de llevar a cabo la actividad fueron: Zulema Saiz, profesora de matemáticas de los alumnos anteriormente mencionados y José María Sordo, profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid; ambos, coautores de esta comunicación.

Descripción de la intervención

La intervención se realizó en dos sesiones de 50 minutos durante los días lunes 2 de marzo y jueves 12 de marzo de 2015.Se dividió la clase en dos grupos de cinco alumnos, dos de cuatro y uno de seis. Salvo el caso de los dos alumnos con necesidades comentado anteriormente, no se tomó ningún criterio académico para la división; únicamente la colocación inicial de los alumnos en sus pupitres. Se repartió un sobre a cada uno de los grupos con cuerdas de distinta longitud, y una ficha de actividades. Se les pidió que, siguiendo las instrucciones que venían en la hoja, contestaran a varias cuestiones divididas en dos partes (ANEXO III). Los alumnos trabajaron durante 40 minutos. Los profesores que nos encontrábamos en el aula no dimos ningún tipo de ayuda, aunque tuvimos que pedirles que prestaran mucha atención a la consigna de la primera parte de la actividad:

> *"Elegid una cuerda del sobre que permita construir con ella cuadrados de 2 cm de lado, sobrando el mínimo de cuerda".*

Cuando el tiempo de la primera sesión finalizó, se preguntó a cada grupo qué cuerda habían elegido y por qué, realizando así una primera puesta en común sin llegar a validar sus respuestas por falta de tiempo.

En la segunda sesión, el día 12 de marzo, los alumnos tuvieron tiempo para terminar la última pregunta de la actividad descrita en la ficha del Anexo III. En esa segunda sesión, también se pusieron en común el resto de respuestas.

Figura 12. Alumnos trabajando en la Intervención en el IES Jaime Ferrán de Clúa.

Los detalles de la propuesta hecha a los alumnos vienen reflejados en la tabla siguiente en la que pueden verse las preguntas planteadas a los alumnos. Recordemos que hemos utilizado dos días para el desarrollo de las dos actividades planteadas, en el primer día los alumnos dieron respuesta a la fase 1ª y las dos primeras cuestiones de la fase 2ª de la primera actividad. En el segundo día, los alumnos completaron la Fase 2ª de la primera actividad y realizaron la segunda actividad completa.

Material:
Un sobre con cinco cuerdas de diferente longitud.
(Nota: solamente una de las cuerdas cumple con la condición propuesta y no sobra nada)
Reglas para medir, papel para contestar y dibujar.

Organización del aula:
Grupos de 4-5-6 alumnos.
A cada grupo se leda un sobre con las cinco cuerdas y una hoja de papel en blanco.

Objetivos de la primera actividad:
Conseguir que los alumnos aborden un problema de medida, y más concretamente, medida de una magnitud continua, y poder observar cómo tratan el problema de la aproximación en la medida.

Primera actividad- 1ª fase(para familiarizarse con el contexto):
Consigna: ***"****Elegid una cuerda del sobre que permita construir con ella cuadrados de 2 cm de lado y que sobre el mínimo de cuerda posible. Contestad por escrito a las siguientes preguntas, explicando todo lo que hacéis.****"***

Primera actividad - 2ª fase*:*
Una vez seleccionada la cuerda, los alumnos deben contestar a las siguientes cuestiones:
¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado podéis construir con la cuerda?
¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado podéis construir con la mitad de la cuerda?
¿Cuántos cuadrados de 2 cm podéis construir con los 2/3 de la cuerda?
¿Cuál es la longitud de la cuerda que sería necesaria para construir el 25% de 36 cuadrados de 2 cm de lado?
En todas ellas se les pide a los alumnos que razonen la contestación.

Segunda actividad - 1ª fase
Dibujad en una hoja de papel DINA4, el cuadrado que se pueda construir con toda la cuerda que habéis elegido.

Segunda actividad - 2ª fase
Hacer otro dibujo de este cuadrado a una escala 1 cm:1/2 cm.

Objetivos de la segunda actividad: conseguir que los alumnos mejoren utilizando códigos orales y escritos para poder comunicar cuestiones relativas a la proporcionalidad.

Tabla 1. Descripción de la intervención en el IES Jaime Ferrán de Clúa.

Datos

De nuevo se recogieron datos cualitativos mediante observación en el aula. Tanto el profesor de matemáticas, como el otro guía de la sesión, se movieron por el aula entrevistando oralmente a todos los participantes. Además, se recogieron las respuestas que los alumnos dieron por escrito a las tareas propuestas.

Primeros resultados

Las sesiones se desarrollaron en un clima de trabajo excelente, los alumnos estuvieron muy interesados y participaron activamente. Todos los grupos tenían una regla de menos de 30 cm, y su forma de medir no fue muy precisa. Ningún grupo revisó las mediciones realizadas. Un grupo no seleccionó ninguna cuerda, por lo que, cuando se les recordó que esa parte era primordial, tuvieron que rehacer toda la actividad y no les dio tiempo. Dos grupos seleccionaron mal la cuerda, por falta de precisión en la medición. La Segunda actividad - 2ª fase, generó dudas, ya que la escala que se les daba convertía la figura en una más pequeña, algo a lo que, pensamos, no están acostumbrados.
Para terminar esta sección ofrecemos a continuación algunas de las respuestas de los alumnos a la Primera actividad - 1ª fase.

- **Grupo 1**: cuerda mal seleccionada. Respuestas bien explicadas pero sin usar lenguaje matemático; algunas de ellas no son muy precisas.

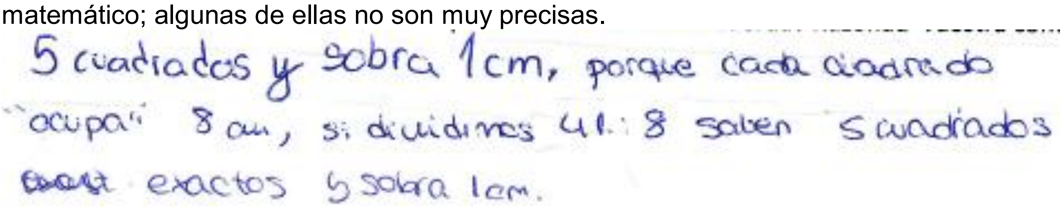


Figura 13. Respuesta Grupo 1, primera actividad IES Jaime Ferrán de Clúa.

- **Grupo 2**: bien seleccionada la cuerda. Justifican sus respuestas con operaciones y utilizan conceptos matemáticos.

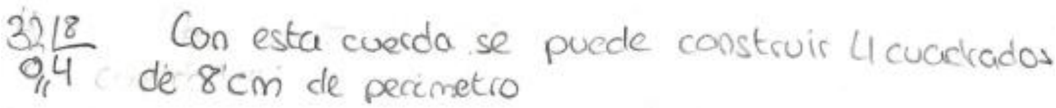


Figura 14. Respuesta Grupo 2, primera actividad IES Jaime Ferrán de Clúa.

- **Grupo 3**: cuerda mal seleccionada. Utilizan conceptos matemáticos en sus explicaciones, dando respuestas precisas y bien explicadas.

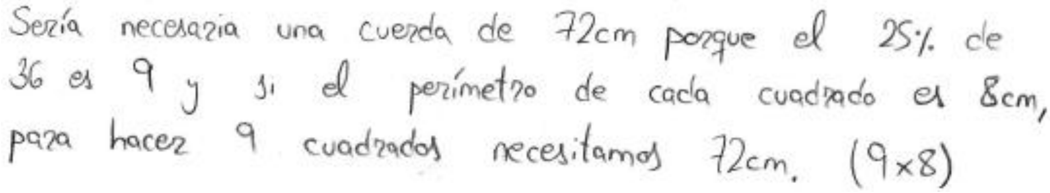


Figura 15. Respuesta Grupo 3, primera actividad IES Jaime Ferrán de Clúa.

- **Grupo 4**: cuerda bien seleccionada. Justifican sus respuestas con operaciones y utilizan, algunas veces, conceptos matemáticos.

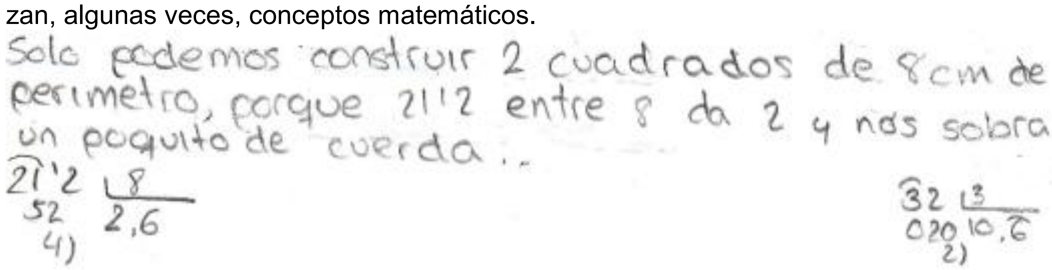


Figura 16. Respuesta Grupo 4, primera actividad IES Jaime Ferrán de Clúa.

- **Grupo 5**: actividad sin realizar porque no hicieron la selección de la cuerda. La única respuesta que dieron fue imprecisa. Este es el grupo donde estaban integrados el alumno marroquí con dificultades de idioma y la alumna con necesidades educativas especiales.

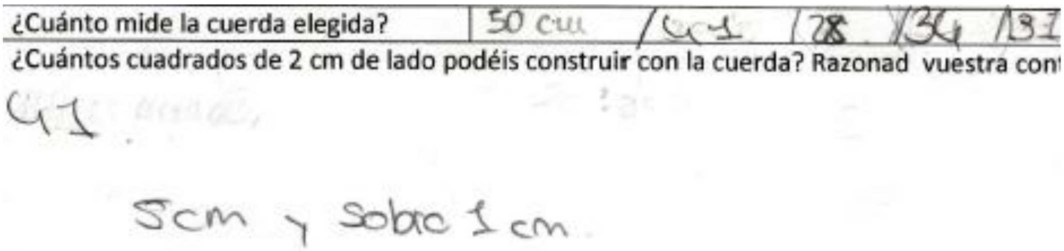

¿Cuánto mide la cuerda elegida? | 50 cm /41 /28 /34 /31
¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado podéis construir con la cuerda? Razonad vuestra con
41
5cm y sobra 1 cm

Figura 17. Respuesta Grupo 5, primera actividad IES Jaime Ferrán de Clúa.

Discusión y primeras conclusiones

Recordemos que los objetivos fundamentales del trabajo presentado en esta comunicación eran dos. En primer lugar, hemos constituido un grupo multidisciplinar de profesionales, tanto en la enseñanza de las matemáticas como de la didáctica de la disciplina, para realizar investigaciones sobre la transición de primaria a secundaria a través del aprendizaje de las matemáticas. En segundo lugar, para avanzar en la consecución del primer objetivo descrito, nos planteamos una propuesta concreta para trabajar la proporcionalidad a través de tres actividades con tres grupos diferentes de alumnos de primer ciclo de la ESO, en tres contextos y en tres centros diferentes; con el fin de iniciar una reflexión sobre el problema planteado y así, con las primeras conclusiones, avanzar hacia una secuencia didáctica para el tercer ciclo de primaria y primer ciclo de secundaria en la que el razonamiento proporcional se vaya construyendo sobre las experiencias y conocimientos previos de los alumnos.

Un eje central en nuestra propuesta ha sido el papel del profesor. El rol del docente es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, pues debe ser capaz de diseñar tareas o situaciones de aprendizaje que posibiliten la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos aprendidos y la promoción de la actividad de los estudiantes. Además, entendemos que las dificultades que presentan muchos alumnos no se deben tanto a la falta de resolución de muchos problemas parecidos o similares, sino a la dificultad de usar su conocimiento en un contexto distinto del que se utilizó para su aprendizaje. Desde nuestro punto de vista, el aprendizaje debe iniciarse en un contexto con significado para el alumnado [14]. En este contexto, la construcción del conocimiento se produce dándole al alumno el protagonismo. No es un simple actor pasivo receptor de conocimiento ya elaborado presentado por el profesorado, sino que en la situación que se le propone deberá reconstruir este conocimiento en el cual su papel será activo y determinante. Así, en las tres intervenciones descritas en esta comunicación, el punto de partida de las tareas planteadas era la resolución de un problema contextualizado en un entorno próximo a los alumnos. Desde nuestro punto de vista, el aprendizaje debe iniciarse en un contexto con significado para el alumno.

Los alumnos con los que hemos trabajado son alumnos que acaban de dejar la educación Primaria y por tanto, son alumnos para los que el espacio geométrico coincide bastante con el espacio sensible: es una mezcla de conocimiento espacial y conocimiento geométrico. Son alumnos que están en un cambio profundo; aprenden de su propia experiencia inmediata, manipulando, observando y descubriendo cómo pueden utilizar un instrumento, un objeto. Por eso, ante una situación didáctica, deberían observar, dibujar y manipular formas que van asociando de forma gradual, clasificándolas y construyendo imágenes mentales definitivas mediante sucesivas aproximaciones. Con el tiempo, irán apareciendo en el alumno formas espontáneas invariantes que van a permitirle pasar de una percepción directa al uso de instrumentos para verificar sus conjeturas; y es entonces cuando la geometría se convierte en un modelo de la realidad. Sin embargo, en las tareas propuestas tradicionalmente desde los libros de texto para tratar la proporcionalidad, no se facilita, en general, este tipo de trabajo. Por eso los profesores, teniendo en cuenta estas reflexiones, tenemos que incorporar actividades matemáticas en nuestras aulas que favorezcan la comunicación, la experimentación, el trabajo cooperativo, el paso por diferentes registros de representación, etc., de forma que sean nuestros alumnos los que puedan validar y discutir sus resultados organizadamente en el aula.

Constantemente aparecen limitaciones propias de su lenguaje, pero comienzan a estructurar sus observaciones y experiencias a través del establecimiento de relaciones espaciales y temporales. Son alumnos que cambian su punto de vista con la ayuda del profesor, van evolucionando cada vez más hacia un pensamiento racional y mejoran las representaciones que van a ser necesarias para validar la situación problema propuesta. Como hemos constatado en los resultados de la intervención en el IES Alpajés, es crucial cuidar el lenguaje a la hora de redactar la consigna de las tareas.

Por otra parte, en lo que se refiere al proceso de comunicación, en las tres intervenciones analizadas y siempre en general, cuando los alumnos son emisores, no han tenido la necesidad de justificar lo que hacen y cuando han construido un mensaje hemos podido comprobar que han necesitado identificar, relacionar, analizar y nombrar, y para ello, han usado el conjunto de los saberes geométricos como son los nombres de los objetos, sus propiedades, el uso de útiles geométricos…. En general, han ejecutado acciones en forma algorítmica formulando una respuesta a la situación didáctica planteada. Como hemos visto en la sección anterior, todos han dado mensajes breves en los que las cantidades aparecen siempre expresadas con números. Cuando los alumnos han sido receptores, las propiedades y el dibujo geométrico ha sido un referente de sus imágenes mentales; han usado útiles geométricos como la regla y han tenido que convertir su conocimiento en un saber hacer.

Si analizamos cómo se ha desarrollado el proceso de modelización en las tres actividades propuestas, hemos podido observar que los alumnos cuando aparece en el enunciado algún cuantificador semántico, reconocen el problema y ejecutan “una regla de tres”, escribiendo todo tipo de ecuaciones; piensan que deben escribir todos los pasos cuando la solución es inmediata. Pero tienen dificultades en modelizar la situación problema si no se les dicen palabras del tipo tanto por ciento, la mitad de, escala, etc. La regla de tres es el procedimiento usado masivamente; tal y como hemos podido observar en los resultados de los alumnos a los que se ha propuesto la primera actividad (véase Figura 5 más arriba).Se ha convertido en un objeto a enseñar, es usada como un procedimiento experto, los alumnos no reconocen que un problema es de proporcionalidad, pero sí que es de la regla de tres. Como hemos visto en la intervención llevada a cabo en el IES Alpajés de Aranjuez, si aparece una escala y se les dice que trabajen con ella no tienen problema, pero si no aparece explícitamente la escala, es entonces cuando se presentan problemas para modelizar la situación y recurren al espacio sensible, abandonando las relaciones entre los objetos, realizando dibujos donde aparece solamente la misma cantidad de objetos y la posición que ocupan, por lo general sin estar relacionados entre ellos, sin proporcionalidad, sin usar escala, y si acaso acotando las medidas en el papel a modo de “leyendas” que acompañan a sus dibujos (véanse Figuras 10 y 11 más arriba).

Además, el contrato didáctico ha influido en las respuestas de los alumnos, como hemos comentado más arriba en la actividad del plano del aula, pues aparecía la noción de área de manera recurrente en todos los grupos sin ser necesario (no lo habíamos previsto en nuestro diseño tampoco).

Como resultado indirecto de nuestro trabajo, hemos detectado que hay alumnos que presentan problemas por una mala construcción de los números racionales; parece que han construido los racionales no significativamente, siendo capaces de sumarlos, multiplicarlos, etc., pero no de encontrar cuál es el número que relaciona dos medidas de longitud. Han construido el número racional más como un operador y no como una medida, y totalmente descontextualizado y desconectado de “otras áreas” de las matemáticas [15, 16]. Por ejemplo, en el problema del puzle, los alumnos de 2º ESO C del Colegio Liceo San Pablo que diseñaron la pieza 3 (véase Figura 4 más arriba), no fueron capaces de construir una pieza proporcional a otra. En lugar de multiplicar cada medida de los lados que determinan la pieza por 1,75, decidieron sumar la misma medida a cada lado; no comprendiendo por tanto el concepto de proporción ni el de semejanza.

Para terminar, queremos destacar que la motivación, el buen comportamiento en el aula y la alta participación de los alumnos han estado presentes en las tres intervenciones. Además, como los alumnos no están acostumbrados a este tipo de trabajo, hemos observado que ha faltado tiempo para completar las actividades (no por su falta de actividad ni de interés). Pensamos que una vez que los alumnos se acostumbren, su rendimiento será mucho mejor en menos tiempo. También los profesores nos tenemos que “entrenar” a planificar y diseñar este tipo de sesiones en las que la modelización es el eje central, como complemento a otro tipo de sesiones más rutinarias, también necesarias en el trabajo diario del aula. El hecho de plantear actividades para esta primera toma de contacto en nuestro grupo ha sido una limitación de nuestro estudio; pero esta limitación será solventada en un futuro próximo cuando diseñemos y desarrollemos una secuencia didáctica completa para trabajar la proporcionalidad en el primer ciclo de la ESO y en el último curso de primaria.

Agradecimientos

Los autores están especialmente agradecidos a todos los alumnos participantes que han hecho posible este estudio, así como a los equipos directivos de sus respectivos centros escolares.

Referencias bibliográficas

[1] Mochón Cohen, S. (2012): “Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres”. Educación Matemática, Vol. 24, Núm. 1, pp. 133-157.

[2] Ramírez, M. y Block, D. (2009): "La fracción y la razón: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". Educación Matemática, Vol. 21, Núm.1, pp. 63-90.

[3] Godino, J. D. y Batanero, C. (2002): “Proporcionalidad, Matemáticas y su Didáctica para Maestros, Manual para el estudiante” (consultado el 20 de marzo de 2015 en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf).

[4] Real Decreto 126|2014, de 28 de febrero, por el que se establece el Currículo Básico de la Educación Primaria (consultado el 20 de marzo de 2015 en: http://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf).

[5] reciente Real Decreto 1105|2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (consultado el 20 de marzo de 2015 en: http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf).

[6] Fernández González, E., Chamorro, M. C. y Belmonte Gómez, J. M. “Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas”, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, ISBN: 84-369-3531-4, 2001.

[7] Bosch i Casabò, M. “La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1995.

[8] Duval, R. “A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics”, Educational Studies in Mathematics, vol. 61, nº 1, pp. 103-131, 2006.

[9] Star, J.R. yRittle-Johnson, B. (2008). “Flexibility in problem solving: The case of equation solving”. Learning and Instruction, 18, pp. 565-579, 2008.

[10] Brousseau, G. “Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas”, Editorial Libros del Zorzal, 2007, ISBN: 978-987-599-035-7.

[11] Brousseau, G. “Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 3: situations problèmes".Elem-math IX, pp. 80-82, 1987.

[12] GeoGebra (consultado el 20 de marzo de 2015 en https://www.geogebra.org/).

[13] Google maps (consultado el 20 de marzo de 2015 en https://www.google.es/maps).

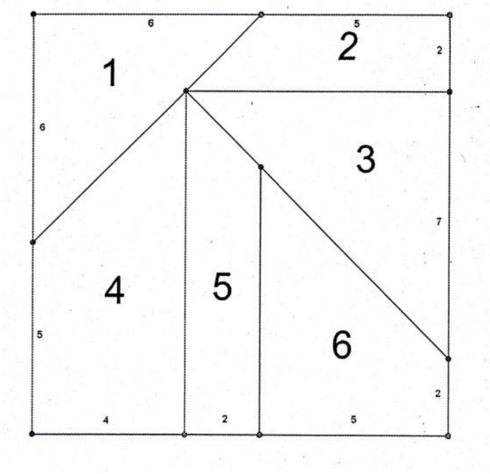
[14] Vilella, X., Sol, M., Cobo, P., Comellas, J., Giménez, J., López, A., Marsela, Y., Martín, R., Roca, E., Sala, E., Serra, J., Vilanova, M. y Vilaplana, S. “Álgebra en contexto”. Actas de las XIV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Girona, 2009.

[15] Feijs, E., Galen, F., Gravemeijer, K., Herpen, E. y Keijzer, R. “Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6”.TAL Project Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.Utrecht University. SensePublishers: Rotterdam, TheNetherlands, 2008.

[16] Fortuny, J. M., Almato, A., Valldaura, J., Fiol, M. L. y Hosta, I. “Experiencia didáctica para trabajar la proporcionalidad”.Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, pp. 189-206, 1984-86.

Anexos

I. Colegio Liceo San Pablo: puzle entregado a los alumnos



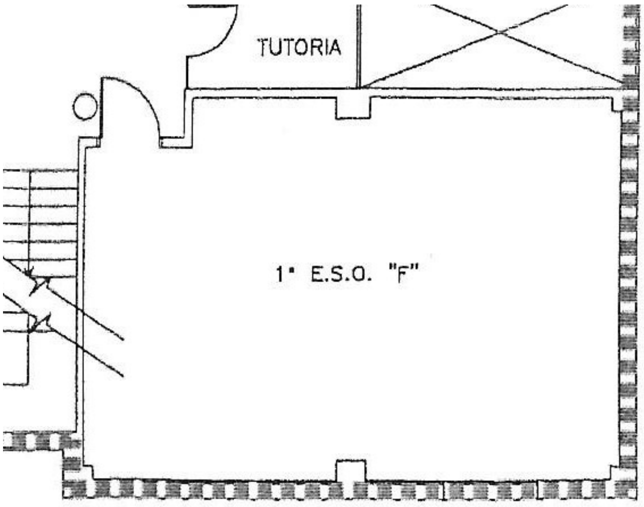
II. IES Alpajés: ficha completa de sesión 1.

Juan Carlos, el director de vuestro instituto, tiene hacer un inventario del mobiliario del centro para enviarlo a la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid con el objetivo de que allí valoren las necesidades materiales de vuestro centro en los próximos años. Le han dado solamente una semana para hacerlo, pues este viernes, último día lectivo del mes de febrero, tiene que enviar la documentación de manera oficial. Ante la premura de la tarea, Juan Carlos ha decidido pedir ayuda a los profesores y alumnos del centro para hacer el inventario de las aulas de la ESO.

Andrés ha pensado que lo mejor es colocar en el siguiente plano (obtenido a partir del Proyecto de autoprotección del centro), todos los muebles que hay en vuestra clase. Hay que colocarlos de manera que Juan Carlos pueda averiguar las medidas reales (excepto la altura) de cada uno así como las distancias entre ellos.

Tenéis 30 minutos para ayudar a Andrés en esta tarea.

Nota: El secretario de vuestro equipo tiene que escribir en este espacio los pasos que habéis ido dando para encontrar la respuesta a nuestra pregunta. Por favor, dad todos los detalles posibles.



III. IES Jaime Ferrán de Clúa: ficha completa.

Nombre de los alumnos:
“**Elegid una cuerda del sobre que permita construir con ella cuadrados de 2 cm de lado y que sobre el mínimo de cuerda posible.**”
Una vez seleccionada la cuerda, contestar a las siguientes cuestiones: (En todas ellas se les pide a los alumnos que razonen la contestación)
¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado podéis construir con la cuerda?
¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado podéis construir con la mitad de la cuerda?
¿Cuántos cuadrados de 2 cm podéis construir con los 2/3 de la cuerda?
¿Cuál es la longitud de la cuerda que sería necesaria para construir el 25% de 36 cuadrados de 2 cm de lado?
Dibujad en una hoja de papel DINA4, el cuadrado que se pueda construir con toda la cuerda que habéis elegido.
Hacer otro dibujo de este cuadrado a una escala 1 cm:1/2 cm