Una experiencia didáctica en el sistema educativo ginebrino: las restricciones curriculares y propedéuticas

José Ginés Espín Buendía

email: josegines.espin@um.es

Facultad de Matemáticas – Universidad de Murcia

RESUMEN

Analizaremos una experiencia educativa, en el marco del análisis matemático en niveles preuniversitarios (17-19 años), que el profesor Richard O'Donovan está desarrollando en el centro CEC André-Chavanne (Ginebra, Suiza). El objetivo es entender el contexto que facilita la realización de esta novedosa experiencia y las consecuencias que conlleva (contrastándolo con un posible intento en España): por qué es posible un cambio en el programa "estandarizado", cuáles son las restricciones didácticas e institucionales, cómo afecta un cambio de currículo a estudiantes en cursos terminales (función educativa y función propedéutica del bachillerato)...

Currículo, restricciones, propedéutica, bachillerato, análisis.

1. Introducción

La experiencia que se recoge en esta comunicación nace en el curso académico 2012/2013, en el marco del Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria (especialidad en Matemáticas) en la Universidad de Murcia. En calidad de estudiante del citado programa, y como complemento a las prácticas curriculares en un centro de secundaria de la Región de Murcia, tuve la ocasión de realizar una estancia corta en un centro educativo suizo: el CEC André-Chavanne (Ginebra). Aquella visita venía justificada por una investigación que, guiada por el entonces director del Trabajo Fin de Máster Prof. Salvador Sánchez-Pedreño (Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia), había emprendido con el intento de analizar la posible implementación del análisis no estándar en la educación secundaria (véase la segunda sección).

En el desarrollo de la investigación conocí una experiencia novedosa de enseñanza del análisis matemático que actualmente se está llevando a cabo en el ya mencionado centro ginebrino de educación preuniversitaria. El responsable del proyecto, el profesor Richard O'Donovan, me invitó a visitar el centro y a asistir, como oyente, a clases reales de análisis matemático. Pude entrevistar a profesores y estudiantes durante mi estancia; también pude discutir en persona con el profesor O'Donovan los orígenes y motivaciones de su proyecto. Mucha de la información que reuní en aquella estancia aparece recogida en esta comunicación.

Usando como ejemplo la experiencia del CEC André-Chavanne intentaremos analizar qué hace posible la implementación de este proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis matemático en Ginebra y cuáles serían sus dificultades en el sistema español: cuáles son las restricciones educativas e institucionales, cómo de importantes son las funciones propedéuticas y educativas del bachillerato español, que restricciones conlleva una prueba terminal de acceso a la universidad o una reválida...

2. ¿Qué es análisis no estándar?

La investigación en didáctica del análisis matemático en niveles preuniversitarios ha puesto de relieve la necesidad de buscar una alternativa a las propuestas «clásicas» para la enseñanza y el aprendizaje del análisis matemático en la secundaria. Las propuestas actuales no consiguen superar las dificultades intrínsecas que encierran las nociones elementales del análisis: es aún un problema abierto para la didáctica de las matemáticas encontrar formas eficientes de enseñanza (véase por ejemplo [5] y [18]). Nuestra investigación está motivada justamente en este contexto: es necesario tantear nuevas formas de aprendizaje y enseñanza del análisis matemático.

A grandes rasgos podemos decir que el análisis no estándar consigue, desde la perspectiva que a nosotros nos interesa, formalizar y poner bajo los cánones del rigor matemático moderno aquella teoría intuitiva basada en el uso de los infinitésímos que Leibniz utilizó para desarrollar el cálculo infinitesimal en el siglo diecisiete. Las ideas en sus argumentaciones, y en la de la mayor parte de matemáticos y físicos desde su tiempo hasta bien entrado el siglo diecinueve, parecen más naturales que aquellas formas de razonar que acabaron imponiéndose en el cálculo moderno basado en el lenguaje con ε-δ. La pregunta, creemos que natural, que motivó el inicio de la investigación que se pretende dar a conocer con esta comunicación es «¿se puede aprovechar lo intuitivo, o lo aparentemente intuitivo, del análisis no estándar para proponer una forma alternativa de introducir el análisis matemático en la educación preuniversitaria?»

En lo que resta de sección, vamos a intentar hacer un recorrido, muy somero e ingenuo, por la parte esencial de la historia del cáclulo infinitesimal que nos interesa para contextualizar esta comunicación. No profundizaremos en ninguno de los aspectos mencionados aquí, no es el propósito de este trabajo, y además nos centraremos sólo en los puntos que nos interesan para conseguir colocar al lector en un contexto que le permita entender el origen y justificación de nuestra investigación: a qué nos referimos por los infinitésimos de Leibniz y cuál es la teoría moderna que puede implementarse en la educación preuniversitaria moderna. Obviamente una recopilación histórica como la que hacemos aquí no nace de la nada; hemos manejado como bibliografía las obras [2], [9], [10], [16] y [17].

En la segunda mitad del siglo diecisiete, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried W. Leibniz (1646-1716) crearon, de manera independiente, la teoría matemática que hoy conocemos como *cálculo*. Ambos se encontraron en sus investigaciones con el célebre *teorema fundamental del cálculo* consiguiendo relacionar el cálculo de tangentes a curvas con el cálculo de áreas. Se debe matizar aquí que no fueron Newton y Leibniz los primeros en efectuar diferenciaciones e integraciones y que ni siquiera tuvieron la primicia de observar la relación entre ambas operaciones; algunos de los matemáticos que les precedieron, como es el caso de Isaac Barrow (1630-1677), ya habían encontrado la relación entre esas dos operaciones en casos concretos. Lo trascendental y novedoso de las obras de Newton y Leibniz, y la razón por la que se les considera *los padres del cálculo*, es que en sus obras se recogen algoritmos de derivación e integración generales y no sólo aplicables a un tipo concreto de funciones. Además ambos percibieron la importancia capital que tenía esa relación entre la integración y la diferenciación y la usaron como pieza fundamental en sus algoritmos y demostraciones.

Aunque Leibniz y Newton dieron con la misma teoría de integración y derivación, sus formas de proceder, sus ideas, sus técnicas y sus nomenclaturas fueron diferentes. Ambos manejaban las nociones de función y de número real de una forma no suficientemente rigurosa; era todavía tarea pendiente para los matemáticos de aquella época fundamentar adecuadamente esos conceptos. Lo mismo pasaba con lo que hoy entendemos por concepto de *límite*. Ni Newton ni Leibniz manejaban aún una formulación rigurosa de límite semejante a la actual y sin embargo sus descubrimientos y tratados matemáticos usaban y se apoyaban, por doquier, en diversas formas de límite (una idea aproximada a lo que hoy entendemos por límite). Es aquí donde interesa que nos detengamos.

En la obra de Newton puede observarse cómo éste razona bien con infinitésimos (en sus primeras versiones sobre el estudio del cálculo Newton maneja continuamente *incrementos infinitesimales* que en ciertos momentos de sus razonamientos hace desaparecer por considerarlos *despreciables*), bien mediante una idea muy cercana a nuestra noción de límite (por ejemplo para el cálculo de derivadas introduce la noción de *razón primera de incrementos nacientes* o la de *razón última de incrementos evanescentes*), o bien apelando a la intuición física (utilizando la noción de velocidad y velocidad instantánea). Los discípulos de Newton en Inglaterra dieron preferencia a esos dos últimos puntos de vista y dejaron de lado a los infinitésimos. El propio Newton, aunque era consciente de que su uso simplificaba enormemente los razonamientos, criticó los infinitésimos en sus escritos más tardíos y defendió que en toda obra matemática que buscara mayor rigor debía sustituirse toda mención a infinitésimos por un razonamiento en términos de "*límites*".

Leibniz, sin embargo, basa el inmenso grueso de su obra sobre el cálculo en las nociones de *infinitamente pequeño* o *infinitésimo* y de *infinitamente grande*. Los infinitésimos (respectivamente infinitamente grandes) son introducidos por Leibniz como esos números ideales que, sin llegar a ser cero, son, en valor absoluto, más pequeños (respectivamente más grandes) que cualquier cantidad real positiva *ordinaria*. Es el mismo Leibniz el que, en sus escritos, da naturaleza de objetos ideales a esos infinitésimos e infinitamente grandes. Pero se trata de objetos ideales que obedecen a las mismas reglas de cálculo que el resto de *cantidades ordinarias*. Merece la pena insistir en el hecho de que Leibniz no hace un esfuerzo para intentar justificar la existencia de los infinitésimos. Los toma, como escribimos arriba, como objetos ideales. Una suerte de objetos auxiliares que permiten allanar el camino de la invención y de la demostración. Carlos Ivorra, profesor de la universidad de Valencia, compara en [10] esta situación con la que protagonizaron los números complejos entre los algebristas italianos de los siglos dieciséis y diecisiete. Estos eran capaces de llegar a raíces reales de polinomios reales pasando a veces durante sus cálculos por raíces "imaginarias" como la raíz de menos uno. Tomaban esos elementos imaginarios como números ordinarios y operando con ellos formalmente como si de reales ordinarios se tratara y con la regla $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$ llegaban a resultados reales válidos. Leibniz va de hecho un paso más allá, defendiendo que si uno así lo desea siempre podía deshacerse de esos objetos ideales y reconstruir los razonamientos usando el estilo de los matemáticos de la antigüedad argumentando en términos que hacen intervenir sólo cantidades ordinarias tan pequeñas o tan grandes como sea necesario para que el error cometido en los cálculos sea menor que el error de partida (los métodos de Arquímedes). Como referencia para justificar estas afirmaciones puede servir, por ejemplo, el siguiente fragmento de [3]:

> Leibniz is famous for his view that infinitesimals are useful fictions — a position deplored by such critics as Nieuwentijt or the more flamboyant and popular Bishop Berkeley, whose condemnation of the Newtonian calculus might equally well have applied to Leibniz. Leibniz adopted both the infinitely large and the infinitely small in mathematics for pragmatic reasons, as permitting an economy of expression and an intuitive, suggestive, heuristic picture.
>
> Ultimately, there was nothing to worry about since the mathematician could eliminate them from his final result after having infinitesimals and infinities to provide the machinery and do the work of a proof (p. 185).

Sin embargo, parece que la única justificación de esta afirmación que da Leibniz es la apelación a un principio heurístico, una suerte de principio cuasi filosófico, que suele denominarse en la literatura "ley de la continuidad" (véase por ejemplo [11]). Ese mismo principio parece servirle como justificación para la afirmación de que los números infinitamente pequeños e infinitamente grandes obedecen las mismas leyes de cálculo que los números ordinarios.

Dada la variable x, Leibniz introduce la notación dx para referirse a un infinitésimo con el que calcular un *incremento infinitesimal* de la variable en la forma $dx= (x + dx) - x$. Igualmente, dada una función f denota por df un *incremento infinitesimal* de la función. Para explicar, por ejemplo, el cálculo de la derivada de $f(x) = x^2$ utilizaría los siguientes términos. Tomemos un infinitésimo dx. Calculemos el incremento df de la función asociado al incremento infinitesimal dx de la variable x, $df = f(x + dx) - f(x) = 2xdx + dx^2$, y dividámoslo por la cantidad no nula dx. Resulta $df /dx=2x + dx$. Como dx es una cantidad infinitesimal podemos despreciarla y escribir simplemente $df/dx=2x$.

Obviamente el razonamiento anterior provocaba recelo entre algunos de los matemáticos del tiempo: el propio Leibniz era consciente de lo contradictorio de suponer que dx era no nulo para poder dividir por él y luego despreciarlo como si se tratara de una cantidad nula. A pesar de ello su uso fue bastante extendido. El marqués de L'Hospital (1661-1704), por ejemplo, escribe lo que ha llegado hasta nuestros días como el primer libro de cálculo infinitesimal, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, que se basa, como su propio título indica, en los infinitésimos que había llegado a conocer a través del propio Leibniz (mediante correspondencia) y sobre todo gracias a las clases privadas que recibió de Johann Bernoulli (1667-1748).

Durante los siglos dieciocho y diecinueve el cálculo, y las matemáticas en general, buscaron dar con unos fundamentos sólidos que le permitieran erguirse como una teoría rigurosa e independiente. Muchos eran los *fantasmas* que agobiaban las mentes de los matemáticos de la época. Fueron muchos los matemáticos de primera linea que tuvieron que trabajar para alcanzar el nivel de rigurosidad con la que hoy se nos presentan los conceptos del cálculo. Nociones como la de función, como la de número real, la de infinito o la de límite (y la de infinitésimo) ocupó a esos matemáticos.

Muchos de los matemáticos de aquella época siguieron usando la noción de infinitésimo. Incluso el mismo Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien consiguió avanzar de forma crucial hacia la consecución de un cálculo mejor fundado y más autónomo respecto a la geometría, necesitó acudir a los infinitésimos para dar una definición de límite y de continuidad. Así, la búsqueda de una formalización absoluta del cálculo en el siglo diecinueve parecía encontrarse estancada: era necesario o bien encontrar la manera de poder dar sentido y validez al uso de los infinitésimos o desecharlos y dar con otra forma de introducir la noción de límite. Esa *crisis de rigor* vino a resolverla Karl Weierstrass. (La biografía de este matemático bien merecería un trabajo para ella sola. Weierstrass, obligado por su padre a estudiar Derecho, abandona sus estudios antes de acabarlos y decide prepararse para ser profesor de secundaria, profesión que ejercería durante doce años.) Weierstrass (1815-1911) popularizando las definiciones de límite y de continuidad en términos de ε y δ que hoy conocemos. La propuesta de Weierstrass fue rápida y profundamente aceptada por la comunidad matemática y el uso de los infinitésimos en el cálculo quedó desacreditado y sobrevivió sólo como una *forma de hablar* y de proceder informal entre aquellos que se dedicaban a las matemáticas en ciencias experimentales como la física. A éstos últimos, los infinitésimos les seguían pareciendo mucho más intuitivos y prácticos que los ε y δ y la falta de rigor de su uso parecía quedar en un segundo plano frente a la exactitud y utilidad de los resultados a los que eran capaces de llegar.

La recompensa a los que siguieron utilizando esos elementos ideales y buscaron una prueba de su existencia, no llegaría hasta la segunda mitad del siglo pasado, cuando Abraham Robinson (1918-1974) publica la obra *Non-standard Analysis* [16]. Robinson construye un cuerpo ordenado (no arquimediano ni completo), el cuerpo de los hiperreales R*, que extiende al cuerpo de los reales R en el sentido de que el segundo puede verse como subconjunto del primero de forma que las operaciones de suma y producto, así como el orden, del cuerpo de los hiperreales coinciden, al restringirnos a R, con las operaciones y con el orden de la recta real. Esta extensión contiene una infinidad de infinitésimos distintos de cero así como una infinidad de números infinitamente grandes que permiten modelizar aquellos objetos ideales que continuamente invocaba Leibniz.

Estudiar la teoría de Abraham Robinson es tremendamente costoso; construir R* y estudiar sus buenas propiedades requiere tener conocimientos avanzados en lógica matemática. Sin embargo, varias aproximaciones axiomáticas a la teoría de Robinson, más accesibles con recursos elementales, han sido propuestas desde la década de los setenta hasta la actualidad. Se trata de teorías en las que en lugar de construir, como Robinson, los hiperreales a partir de los reales y de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC), se parte de un lenguaje más rico que el de ZFC y de una serie de axiomas que se añaden a los de ZFC que permiten deducir la existencia de nuevos reales (dentro de R) con las deseadas nuevas propiedades. La ventaja de escoger una de esas teorías axiomáticas en lugar de la teoría de Robinson es obvia: evitamos tener que pasar por la difícil construcción de los hiperreales. Estudiar análisis no estándar mediante una aproximación axiomática resulta comparable a la situación que se suele vivir en las facultades españolas cuando se estudia análisis matemático en los primeros cursos de las licenciaturas y grados de ciencias (incluidas las matemáticas). Los números reales se suelen introducir por axioma; el curso suele empezar enunciado como principio no demostrado la existencia de un cuerpo, único salvo isomorfismos, totalmente ordenado y completo: el cuerpo de los números reales.

La primera de esas aproximaciones axiomáticas a la teoría del análisis no estándar fue la teoría *Internal Set Theory* (IST) de Edward Nelson en [13]. En la teoría de Nelson se añade un nuevo predicado unario al lenguaje de primer orden en el que se basa ZFC y se dan tres nuevos axiomas que sumados a los axiomas de ZFC conforman una nueva «teoría de conjuntos». El predicado unario que se añade se denota como st( ). Dado un conjunto x, st(x) es una fórmula atómica del lenguaje de primer orden de IST que se lee «x es estándar». Debe pensarse en el predicado como se piensa en el predicado binario ϵ: ambos se introducen como predicados sin carga de significado a priori; son los axiomas de ZFC y de IST los que «dan» significado a esos predicados. Así, por ejemplo, los infinitésimos en IST son números reales (no estándar) que son menores, en valor absoluto, que cualquier real positivo y estándar.

A mediados de los años ochenta del pasado siglo, Yves Péraire propuso en una nueva aproximación axiomática, la teoría Relative Internal Set theory, RIST, en la que la propiedad «ser estándar» queda redefinida como una propiedad relativa [15]. Ya no se habla de infinitésimos en términos absolutos sino de infinitésimos relativos a cierto nivel de estandarización. La propuesta didáctica que se usa en el CEC André-Chavanne está basada en la teoría *Fully Relative Internal Set theory,* FRIST, (una teoría elaborada por Karel Hrbacek que extiende y «mejora» a RIST). Remitimos al lector interesado en los detalles de la teoría a [7] y [8].

Cualquiera de esas aproximaciones axiomáticas del análisis no estándar es una extensión «segura» de la teoría de conjuntos de ZFC, entendiendo por esto que cualquiera de las aproximaciones es una teoría consistente si lo es ZFC. Una teoría axiomática se dice que es consistente si no contiene contradicciones; es decir, a partir de sus axiomas no se puede demostrar una propiedad y su negación. En matemáticas confiamos en la consistencia de ZFC (tras más de un siglo de su uso no se ha encontrado ninguna contradicción en la teoría) pero desde la obra del lógico Kurt Gödel (1906-1978) conocemos que no podemos demostrar esa consistencia (dentro de ZFC). Lo que afirmamos sobre las aproximaciones axiomáticas del análisis no estándar es que si aceptamos que ZFC es consistente entonces también lo son esas aproximaciones (en ellas no aparecerán contradicciones si no las hay en ZFC). Además esas aproximaciones resultan ser «extensiones conservativas» de ZFC: si conseguimos demostrar en una de las aproximaciones axiomáticas una propiedad escrita en el lenguaje de ZFC, entonces estamos seguros de que también existe una demostración de esa propiedad dentro de ZFC. Con todo ello queremos trasmitir aquí únicamente que hacer matemáticas con una aproximación no estándar no significa hacer otras matemáticas: las matemáticas que se estudian en el bachillerato, tal y como se hace hoy en día en los institutos españoles, se pueden estudiar bajo el paraguas de una aproximación no estándar.

Tenemos constancia de que hubo intentos de adaptar la teoría IST de Nelson a la enseñanza de las matemáticas en España y en Francia. En la introducción de [6] se dice que en el IES Bernardo Balbuena (Valdepeñas, España) se llevó a cabo una experiencia educativa en la que se enseñaba con la teoría que se desarrolla en este libro (una adaptación de IST no muy rigurosa). El autor de la obra y responsable del proyecto nos informó de que, aunque se obtuvieron resultados positivos, el proyecto se terminó abandonando por los problemas que potencialmente podrían tener los estudiantes que fueran educados en la teoría no estándar y llegaran a una facultad de ciencias en las que se enseña con y ε-δ. Otro proyecto que parece mucho más ambicioso y más ordenado fue el que se desarrolló en Francia (véase la web http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/archives/maths_01/index.htm) basándose en el libro [12]. No tenemos información sobre los resultados que se obtuvieron, aunque por la poca actividad que observamos en la web deducimos que el proyecto se paralizó hace tiempo.

La propuesta didáctica sobre la que hemos trabajado nosotros no se basa en ninguna de esas dos experiencias educativas sino, como ya anunciamos arriba, en un proyecto que se desarrolla actualmente en Ginebra y que arrancó en su formato actual, capitaneado por Richard O'Donovan, en el curso 2008/2009. O'Donovan trabaja con el lógico Karel Hrbacek desde 2004 para desarrollar un nuevo marco axiomático del análisis no estándar aplicable a la educación preuniversitaria. De esta fecunda relación ha surgido la teoría FRIST y su adaptación a la secundaria superior. Hasta donde el autor conoce, ésta es la primera vez de la historia de las matemáticas en la que una teoría axiomática del análisis no estándar se desarrolla a la vez que su traducción a la educación secundaria. Más aún, O'Donovan no se ha limitado a adaptar la teoría que el profesor Hrbacek iba desarrollando sino que ha aportado ideas fundamentales para favorecer su implantación a la educación preuniversitaria. La adaptación a la secundaria superior está bautizada por sus autores como el análisis con ultrapequeños.

El análisis con ultrapequeños intenta explotar la noción de órdenes de magnitud que solemos manejar en la vida cotidiana. Es obvio que el radio de la Luna no es de la misma magnitud que el de una canica. Tampoco son comparables el tamaño de un ser humano con el tamaño de una célula o el tamaño de una célula con el de un átomo o con el de una partícula subatómica de esa célula. Parece entonces que la naturaleza está organizada en diferentes niveles de magnitud. El análisis no estándar consigue abstraer y reunir esas ideas en un modelo matemático que permite simplificar y hacer más intuitivo el análisis matemático. Mediante una serie de axiomas, el uso de cantidades muy pequeñas (llamadas ultrapequeñas) respecto a un cierto nivel o contexto estará asegurado. Las formas de razonar de Leibniz, aquéllas que resultaron tan intuitivas para matemáticos y físicos durante siglos, vuelven a tener cabida en las clases de bachillerato. Y como efecto secundario positivo, las demostraciones en análisis vuelven a ser abordables.

No es una propuesta ingenua. Lo que se propone no es cambiar los métodos de enseñanza, ni la elección de un currículo diferente que permita evitar los obstáculos observados en la ya extensa investigación en didáctica del análisis matemático. Lo que se propone es más bien una alternativa a la matemática sabia que se usa actualmente para resolver los problemas del análisis que exige cubrir el currículo español. Utilizando la nomenclatura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), podemos parafrasear lo que acabamos de escribir diciendo que no se busca modificar los tipos de tareas sino cambiar las técnicas, la tecnología y la teoría referente al análisis matemático.

No expondremos aquí los detalles del la teoría del análisis con un ultrapequeños; remitimos al lector interesado en esta teoría y en la forma en la que se adapta a la secundaria a la obra recientemente publicada por [9].

3. Nuestra investigación: ¿qué aprendí en Ginebra?

Recojo en esta sección parte de la información que recopilé en mi visita al CEC André-Chavanne de Ginebra (Suiza). Tras intercambiar algunos correos con el profesor Richard O'Donovan en los que me interesaba por el proyecto educativo basado en el análisis no estándar que se está desarrollando en la citada institución, fui invitado a Ginebra para conocer en primera persona en qué consistía exactamente la propuesta educativa que allí plantean. Mucho de lo presentado más abajo es material elaborado a partir de las notas personales que tomé en entrevistas con Richard O'Donovan y otros profesores o estudiantes.

3.1. ¿Cómo arranca el análisis no estándar en Ginebra?

En esta primera subsección intentaremos resumir la historia que llevó a que se enseñe matemáticas con análisis no estándar en el CEC André-Chavanne tal como se hace en el presente.

Todo empezó en 1989 en Ginebra con los profesores Peter King y Michel Kuhn en un instituto dedicado a la enseñanza de lo que en España sería comparable a un *ciclo formativo de grado superior*. En este ciclo formativo los profesores contaban con la ventaja de ser los últimos profesores de matemáticas que, al menos a priori, tendrían los estudiantes antes de insertarse en el mundo laboral. No tenían, en consecuencia, que preocuparse por las posibles restricciones propedéuticas que existen en otros formatos de formación académica - cuando se enseña matemáticas en secundaria (por ejemplo en el bachillerato español) no se puede obviar el hecho de que los estudiantes (al menos los que sigan estudiando carreras técnicas y científicas) van a enfrentarse antes o después con el lenguaje ε-δ.

Entre los estudiantes los había de nacionalidad francesa que ya habían estudiado un nivel académico incluso superior al del ciclo formativo pero que habían emigrado hasta Ginebra y que esperaban ganar una cualificación profesional. Esos estudiantes manejaban por ejemplo con cierta holgura el cálculo integral; sabían aplicar las propiedades más elementales y calcular antiderivadas y áreas bajo curvas en los casos más sencillos siguiendo simplemente las técnicas aprendidas de memoria pero sin dar sentido a lo que hacían (se limitaban a "aplicar recetas"). Los profesores King y Kuhn decidieron entonces ensayar una enseñanza del análisis basada en una aproximación cercana al cálculo que hacía Leibniz con la hipótesis de que con tal aproximación conseguirían que sus alumnos ganaran en comprensión. Desafortunadamente no hemos podido conseguir ningún tipo de notas o apuntes que estos profesores siguieron en esos cursos.

En 1995 Peter King empezó a enseñar como profesor de matemáticas en el centro de educación secundaria superior CEC André-Chavanne. Compartió con los profesores del departamento de matemáticas de este instituto el proyecto educativo que había estado desarrollando en los últimos seis años. Según Richard O'Donovan, incluso se llegó a convocar a estudiantes que habían pasado por aquel ciclo formativo para que acudieran al CEC André-Chavanne y fueran entrevistados por los profesores y éstos quedaron sorprendidos por el nivel de comprensión que parecían tener sobre las nociones elementales de análisis.

Cuando Richard O'Donovan empieza su carrera docente en el CEC André-Chavanne, en el 2000, conoce a Peter King y comienza a enseñar análisis matemático en la dirección propuesta por este último. Con un pequeño matiz importante: Richard O'Donovan notó desde el principio que lo que hacía el profesor King servía para que los estudiantes consiguieran dar a las nociones del cálculo más sentido, para que entendieran mejor lo que hacían, pero que esto se hacía poniendo en riesgo el rigor matemático que había tras esa propuesta. Los trabajos de Robinson y Nelson ya estaban consolidados por aquel entonces, pero la existencia de esas obras no bastaba para simplemente coger las notas de Leibniz y adaptarlas a la secundaria con la única justificación de que parecían simplificar el proceso de enseñanza y, sobre todo, el de aprendizaje. Richard O'Donovan decide seguir aún así enseñando análisis no estándar pero, conocedor de los posibles problemas de consistencia, decidió hacerlo con una aproximación más cercana a la propuesta por el profesor de la Universidad de Wisconsin H. Jerome Keisler en la obra *"Elementary calculus: an infinitesimal approach"* (el libro fue publicado por primera vez en 1976, en 1986 se publicó una segunda edición revisada; ambas ediciones fueron publicadas por Prindle, Weber & Schmidt aunque los derechos de autor han sido recientemente devueltos a Keisler quien ha decidido ofrecer el libro, revisado en 2012, de forma gratuita al público en su web http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html). Este libro es una adaptación de la obra de Robinson para su enseñanza en un nivel universitario elemental.

En 2002, Richard O'Donovan y Peter King acuden juntos a un congreso sobre análisis no estándar en Pisa (Italia) con la intención de recoger información que les permita mejorar su propuesta didáctica. Vuelven al instituto con consejos didácticos del propio Keisler. Pero en 2003 se encuentran con un problema didáctico grave. En la aproximación que O'Donovan estaba implementando en las aulas sólo se introduce la noción de derivada para los puntos estándar. Un estudiante que aplicara esa definición a puntos no estándar podría encontrarse con resultados sorprendentes y éste fue el caso. Un estudiante se encontró que al derivar la función f(x)=x^2 en los puntos *infinitamente cercanos* a 2 siempre se obtenía como resultado 4. Sin intención de ser rigurosos aquí intentaremos describir cuál era el problema. En la sección anterior introdujimos muy por encima en qué consiste la aproximación axiomática de Nelson; allí dijimos que en esa teoría se distingue entre objetos estándar y no estándar. Pues bien, lo que Richard O'Donovan estaría haciendo esos años con sus alumnos al introducir la noción de derivada de una función en un punto sería lo siguiente. Se diría que una función (estándar) f es derivable en un punto (estándar) x si la para cada *cantidad infinitamente pequeña* dx el cociente incremental (f(x + dx) – f(x))/dx está *infinitamente cerca* de una cantidad (estándar). Así por ejemplo, la derivada de f(x)=x^2 en 2 sería f'(2)=4 porque (f(2 + dx) – f(2))/dx = 4 + dx y y como dx es una cantidad infinitesimal, ésta es despreciable frente a 4 así que 4 +dx está *infinitamente cerca* a 4. Pero si ε≈0 también (f((2 + ε)+ dx) - f(2 + ε))/dx = 2(2 + ε) + dx ≈ 4. Un estudiante llegó de hecho a deducir que entonces la segunda derivada de f(x)=x^2 en x=2 debía de ser cero ya que la primera derivada era constante en todo un entorno de x=2. Se puso entonces de manifiesto que la aproximación didáctica empleada dejaba abierta la posibilidad de que los estudiantes encontraran fácilmente sus debilidades. Seguía mereciendo la pena enseñar como lo estaban haciendo pero era innegable que debían solucionar esos problemas si querían ser rigurosos.

En un nuevo congreso, esta vez en Aveiro (Portugal) en 2003, Richard O'Donovan expone los problemas que había encontrado en su experiencia docente. Su ponencia es la que se recoge en [14] (artículo con el que empecé a conocer sobre la experiencia ginebrina). O'Donovan no consiguió una solución satisfactoria a sus problemas en este congreso y volvió a Ginebra con la sensación de que si los problemas eran tan difíciles de salvar quizás lo más adecuado fuera volver a un sistema educativo basado en epsilon-delta. Además durante la estancia en aquel congreso, la Universidad de Ginebra se había dirigido por carta al director del instituto pidiendo explicaciones del método de enseñanza que estaban aplicando. La universidad protestaba por la poca rigurosidad que parecía tener la aproximación utilizada. Afortunadamente, poco tiempo después el profesor Karel Hrbacek se pone en contacto con O'Donovan vía correo electrónico ofreciendo su ayuda. Según el profesor Hrbacek, una teoría axiomática que estaba desarrollando podría servir para solventar los problemas que O'Donovan había denunciado en Aveiro. Esa teoría a la que se refería Hrbacek es justamente [7]. En palabras del propio O'Donovan, en aquel primer correo el profesor Hrbacek le ofrecía colaborar con él durante los siguientes seis meses para intentar solventar los problemas en la aproximación del no estándar a la secundaria. Hoy, diez años después de aquel correo, Richard O'Donovan y Karel Hrbacek siguen colaborando. Su trabajo conjunto ha dado desembocado en la reciente publicación del libro: [9].

Richard O'Donovan decide detener momentáneamente el programa de enseñanza basado en el análisis no estándar en el CEC André-Chavanne. Trabajaría con Karel Hrbacek y cuando consiguiera tener una teoría sin ningún tipo de fisuras volvería a intentar su implementación en el aula. Con esta idea en mente, con la de volver al análisis no estándar tan pronto como estuviera absolutamente claro que lo que hacían eran verdaderas matemáticas y que podían hacerse con absoluta garantía de éxito, O'Donovan pidió a varios matemáticos de renombre en el mundo del análisis no estándar cartas de apoyo a su propuesta didáctica para, llegado el momento, poder convencer a su director (y a la universidad si fuera necesario) de la valía de su propuesta. Matemáticos como Mauro Di Nasso (profesor en la Universidad de Pisa, Italia), Peter A. Loeb (profesor en la Universidad de Illionis, Estados Unidos), Keith D. Stroyan (de la

Universidad de Iowa, Estados Unidos) o el mismo Keisler mandaron cartas avalando el proyecto que O'Donovan había propuesto en Aveiro. Como ilustración presentamos, más abajo, la carta de Keisler (véase la figura 4).

En el curso académico 2008/2009, y tras varios años de duro trabajo junto con Hrbacek, decidieron volver a enseñar análisis matemático en el CEC André-Chavanne con la aproximación basada en *FRIST* y que han bautizado como *análisis con ultrapequeños*.

Actualmente el departamento de matemáticas de este instituto está usando la aproximación con ultrapequeños y la enseñanza tradicional en ε-δ. Los profesores del programa bilingüe en inglés siguen la primera aproximación; los profesores de la enseñanza en francés enseñan con la segunda.

La Universidad de Ginebra ya ha aceptado que lo que se hace en el CEC André-Chavanne son verdaderas matemáticas (aunque, según el propio Richard O'Donovan, eso no significa que comulguen con ese método de enseñanza). En cualquier caso, una vez probado que *FRIST* es una extensión conservativa y consistente con *ZFC*, la universidad no puede negarse a que se enseñe del modo en el que lo hacen. La administración fija cuál es el currículo pero no cómo debe enseñarse ese currículo. En las figuras 2 y 3 de más abajo mostramos tablas del currículo que se debe abordar en el cantón de Ginebra en la enseñanza del análisis matemático en los dos últimos cursos de educación preuniversitaria en el nivel avanzado. Todos los estudiantes que cursen la educación preuniversitaria en Ginebra están obligados a cursar matemáticas en todos los cursos; existen dos modalidades: matemáticas de nivel estándar (para los estudiantes que no quieren seguir estudiando ciencias en la universidad; 4 horas semanales) y matemáticas de nivel avanzado (para los futuros estudiantes de carreras científicas y tecnológicas; 6 horas semanales).

MATHEMATIQUES NIVEAU NORMAL (MA1) — **3e ET 4e ANNEES**

	Thèmes	Objectifs	Notions et concepts	Savoir-faire
3e et 4e MA1	Analyse	• maîtriser la notion de dérivée d'une fonction • raisonner sur les relations entre une fonction et sa dérivée • se familiariser avec le calcul infinitésimal, les nombres réels, le continu • exploiter les représentations graphiques de fonctions • connaître des démonstrations et développer une capacité à la démonstration • appliquer les méthodes de l'analyse dans le traitement de modèles proposés par les sciences expérimentales	• limite, continuité et comportement asymptotique	• calculer des limites simples : détermination de nombres dérivés et d'asymptotes • maîtriser graphiquement la continuité d'une fonction en un point
			• dérivée et taux de variation	• interpréter graphiquement la dérivée en un point (équation de la droite tangente, approximation du premier ordre) • calculer les dérivées des fonctions élémentaires à partir de la définition de la dérivée • maîtriser les règles de dérivation (somme, produit, quotient, composition de fonctions)
			• étude de fonctions	• faire le lien entre dérivabilité et continuité • utiliser la relation entre le signe de la dérivée et le sens de variation • connaître la démonstration de quelques théorèmes (par exemple: Rolle, Lagrange, extremum) • résoudre des problèmes d'extrema
			• primitive	• connaître la définition d'une primitive d'une fonction • déterminer l'ensemble des primitives de fonctions élémentaires
			• intégrale	• interpréter graphiquement la notion d'intégrale • connaître les propriétés de l'intégrale et le théorème de la moyenne • démontrer le théorème fondamental • calculer des aires de surfaces planes et des volumes de corps de révolution
			• logarithme et exponentielle	• connaître la définition intégrale du logarithme • établir les propriétés caractéristiques du logarithme et de l'exponentielle • traiter les modèles de croissance et de décroissance

Figura 1: Currículo que se debe abordar en el cantón de Ginebra en el nivel normal de la enseñanza del análisis matemático en los dos últimos cursos de educación preuniversitaria – véase [4, p. 103].

MATHEMATIQUES NIVEAU AVANCE (MA2) — 3e ET 4e ANNEES

3e et 4e MA1

Thèmes	Objectifs	Notions et concepts	Savoir-faire
Analyse	• maîtriser la notion de dérivée d'une fonction • raisonner sur les relations entre une fonction et sa dérivée • se familiariser avec le calcul infinitésimal, les nombres réels, le continu • exploiter les représentations graphiques de fonctions • connaître des démonstrations et développer une capacité à la démonstration • appliquer les méthodes de l'analyse dans le traitement de modèles proposés par les sciences expérimentales	• limite, continuité et comportement asymptotique	• calculer des limites simples : détermination de nombres dérivés et d'asymptotes • maîtriser graphiquement la continuité d'une fonction en un point
		• dérivée et taux de variation	• interpréter graphiquement la dérivée en un point (équation de la droite tangente, approximation du premier ordre) • calculer les dérivées des fonctions élémentaires à partir de la définition de la dérivée • maîtriser les règles de dérivation (somme, produit, quotient, composition de fonctions)
		• étude de fonctions	• faire le lien entre dérivabilité et continuité • utiliser la relation entre le signe de la dérivée et le sens de variation • connaître la démonstration de quelques théorèmes (par exemple: Rolle, Lagrange, extremum) • résoudre des problèmes d'extrema
		• primitive	• connaître la définition d'une primitive d'une fonction • déterminer l'ensemble des primitives de fonctions élémentaires
		• intégrale	• interpréter graphiquement la notion d'intégrale • connaître les propriétés de l'intégrale et le théorème de la moyenne • démontrer le théorème fondamental • calculer des aires de surfaces planes et des volumes de corps de révolution
		• logarithme et exponentielle	• connaître la définition intégrale du logarithme • établir les propriétés caractéristiques du logarithme et de l'exponentielle • traiter les modèles de croissance et de décroissance

Figura 2: Currículo que se debe abordar en el cantón de Ginebra en el nivel avanzado de la enseñanza del análisis matemático en los dos últimos cursos de educación preuniversitaria (primera parte) – véase [4, p. 106].

MATHEMATIQUES NIVEAU AVANCE (MA2) — 3e ET 4e ANNEES

3e et 4e MA2

Thèmes	Objectifs	Notions et concepts	Savoir-faire
Analyse (suite)	• idem	• logarithme et exponentielle	• connaître la définition intégrale du logarithme • établir les propriétés caractéristiques du logarithme et de l'exponentielle • traiter les modèles de croissance et de décroissance
		• équations différentielles du 1er ordre	• connaître la définition d'une équation différentielle • résoudre des équations différentielles à variables séparables (solutions générale et particulière) • résoudre des problèmes conduisant à une équation différentielle du 1er ordre
		Prolongements possibles	
		• suites et séries	• utiliser les suites et séries arithmétiques et géométriques • maîtriser les principaux critères de convergence des séries à termes positifs • déterminer le domaine de convergence d'une série entière • utiliser les développements en séries de Taylor et Mac-Laurin
Nombres complexes	• conceptualiser une extension du corps des nombres réels • développer l'esprit d'abstraction et de rigueur face à de nouveaux objets • exploiter la diversité des expressions d'un même nombre pour résoudre des problèmes	• corps des nombres complexes	• connaître la définition d'un nombre complexe • maîtriser les opérations
		• formes	• connaître les différentes écritures d'un nombre complexe (algébrique, trigonométrique, exponentielle) • utiliser les notions de module et d'argument • savoir représenter dans le plan des points dont l'affixe complexe satisfait certaines conditions
		• équations	• savoir résoudre des équations du type $z^n=a$ et $az^2+bz+c=0$ • connaître la démonstration de la formule de Moivre

Figura 3: Currículo que se debe abordar en el cantón de Ginebra en el nivel avanzado de la enseñanza del análisis matemático en los dos últimos cursos de educación preuniversitaria (segunda parte) – véase [4, p. 107].

August 25, 2004

To Richard O'Donovan:

I wish to comment on a letter of June 28 2004 from the University of Geneva Mathematics Department. The letter expressed concerns about the use of nonstandard analysis in the teaching of elementary calculus. They were asked for an opinion on a poorly written 280 page project, and quite properly gave a negative opinion. But then they expressed the concern that the use of nonstandard analysis in the teaching of calculus would penalize students. I believe this conclusion is based on insufficient information.

I agree with the opinion in the letter that rigorous teaching of the full-blown nonstandard analysis at the college level is not possible, but the same can be said of functional analysis and measure theory. However, for over thirty years, many universities have successfully taught calculus to first year college students and some high school students using nonstandard analysis. This is possible because the part of nonstandard analysis needed for the calculus is much simpler than the full theory and can be easily presented in a rigorously correct way to beginning students. There are several textbooks that do this, including my own book which can be found at my web site at www.math.wisc.edu/-keisler.

A calculus course with nonstandard analysis should contain all the material in the standard courses plus something extra. In the first week, the properties of infinitesimals and hyperreal numbers should be explained. This gets the students interested at the beginning, and the time is made up later because it now becomes easier to explain limits, continuity, derivatives, and integrals. The students first get the definitions using infinitesimals (which are rigorous counterparts of the original historical approach) , and then the equivalent standard definitions using epsilons and deltas. This helps because the epsilon-delta definitions alone are hard to grasp and are a major stumbling block for students in the standard courses, while the infinitesimal definitions easier to understand. Students from both types of courses end up with the same ability to work standard problems, but the nonstandard students get a better grasp of the basic concepts.

The letter expresses concern that students will be taught a theory that will be of little help for those who go on to the university. The fact is that the extra material takes little time and is of immediate help in understanding calculus. It may help a few students later as well, but it is unlikely that the extra knowledge will hurt anyone.

I believe that when it comes to nonstandard analysis, some professors are afraid of encountering students who know things that the professor does not know. This fear is unfounded, as any research analyst can quite easily teach himself the basics of nonstandard calculus if he chooses, and may benefit by doing so.

Mr O'Donovan has actively sought advice from the top researchers in nonstandard analysis at the major conferences in Pisa in 2002 and Aveiro in 2004. Several people in the field have taken an interest in his teaching approach and are closely monitoring his efforts to make sure that it is done correctly.

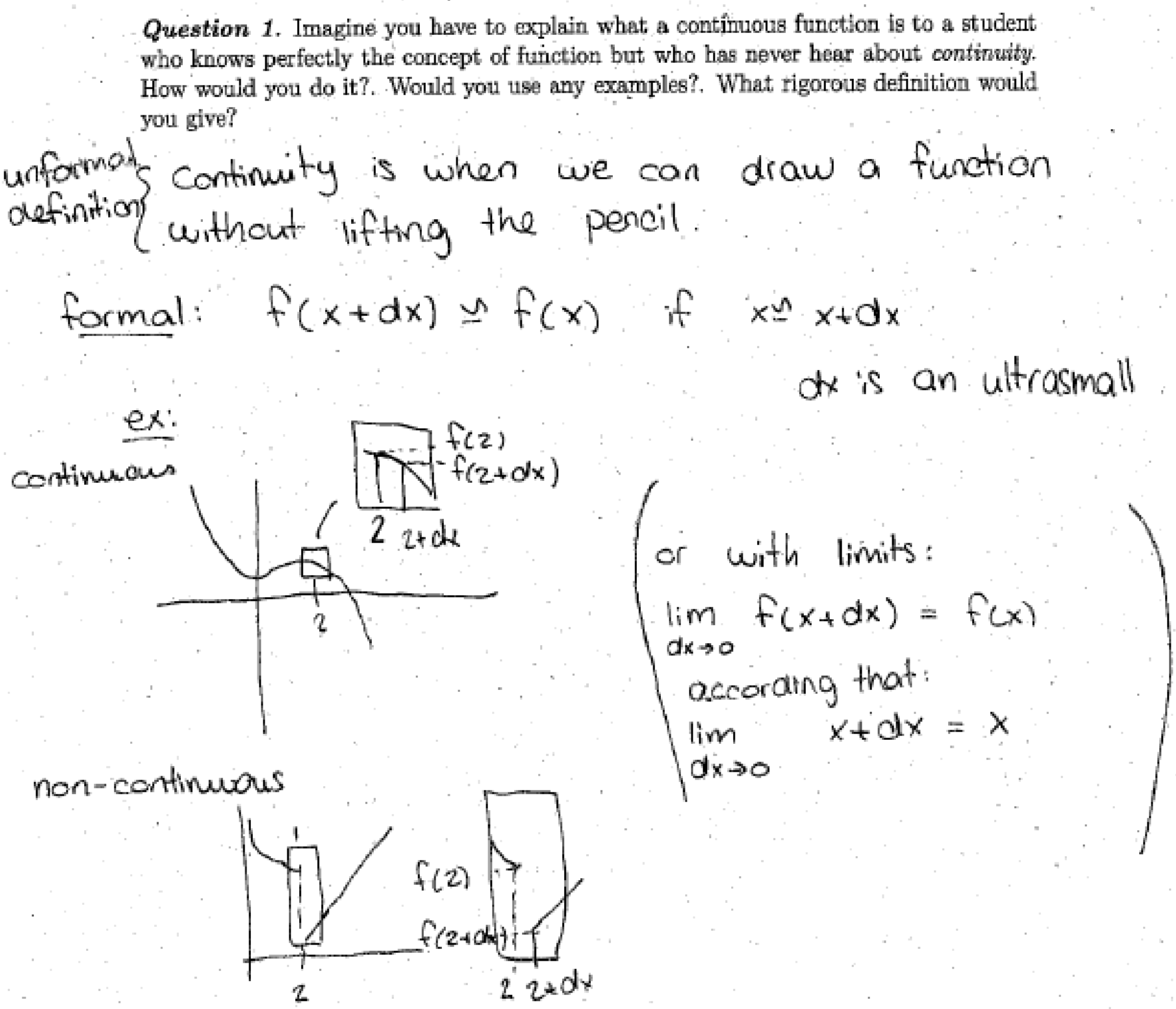
Sincerely,

H. Jerome Keisler

H. Jerome Keisler
Vilas Professor of Mathematics
University of Wisconsin

Figura 4: Carta del profesor Jerome Keisler (Universidad de Wisconsin) en defensa de las técnicas educativas empleadas en el CEC André-Chavanne

El objetivo último que se proponen conseguir Richard O'Donovan y sus compañeros de departamento es facilitar la comprensión de las nociones elementales del análisis matemático en los niveles preuniversitarios así como el facilitar (con todo el rigor posible) la realización de demostración en este nivel (el currículo ginebrino exige abordar la demostración de los grandes teoremas que se estudian en el nivel preuniversitario: teoremas como el de Bolzano, el de Weierstrass o el de Role así como los teoremas sobre el álgebra de continuidad o de derivabilidad – la suma de dos funciones derivables es derivable, etc).


Question 1. Imagine you have to explain what a continuous function is to a student who knows perfectly the concept of function but who has never hear about *continuity*. How would you do it?. Would you use any examples?. What rigorous definition would you give?

unformal definition: Continuity is when we can draw a function without lifting the pencil.

formal: $f(x+dx) \simeq f(x)$ if $x \simeq x+dx$

dx is an ultrasmall

ex:

continuous

f(2)

f(2+dx)

2 2+dx

2

or with limits:

$\lim_{dx \to 0} f(x+dx) = f(x)$

according that:

$\lim_{dx \to 0} x+dx = x$

non-continuous

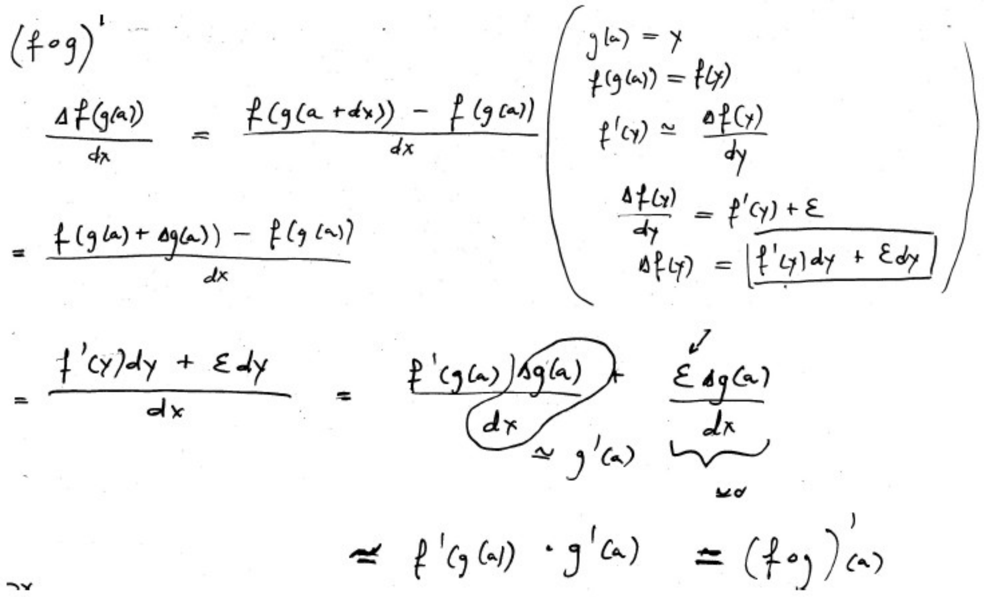
f(2)

f(2+dx)

2

2 2+dx

Figura 5: Durante mi estancia en el CEC André-Chavanne se me permitió encuestar a un grupo de estudiantes en el último curso del nivel avanzado. Esta es la respuesta de uno de esos estudiantes ante una de las preguntas del test



$$(f\circ g)'$$

$$\frac{\Delta f(g(a))}{dx} = \frac{f(g(a+dx)) - f(g(a))}{dx}$$

$$\left(\begin{array}{l} g(a) = y \\ f(g(a)) = f(y) \\ f'(y) \simeq \frac{\Delta f(y)}{dy} \\ \frac{\Delta f(y)}{dy} = f'(y) + \varepsilon \\ \Delta f(y) = \boxed{f'(y)dy + \varepsilon dy} \end{array}\right)$$

$$= \frac{f(g(a) + \Delta g(a)) - f(g(a))}{dx}$$

$$= \frac{f'(y)dy + \varepsilon dy}{dx} = f'(g(a))\underbrace{\frac{\Delta g(a)}{dx}}_{\simeq g'(a)} + \underbrace{\frac{\varepsilon \Delta g(a)}{dx}}_{\simeq 0}$$

$$\simeq f'(g(a)) \cdot g'(a) \simeq (f\circ g)'(a)$$

Figura 6: La demostración de la regla de la cadena presentada por un estudiante del CEC André-Chavanne (17 años)

3.2. ¿Qué pasa al llegar a la universidad?

En el CEC André-Chavanne de Ginebra no tienen la ventaja que tenían los profesores King y Kuhn cuando empezaron a experimentar por primera vez con una aproximación ingenua del cálculo practicado por Leibniz. Los estudiantes de estos dos profesores se encontraban en aquel momento estudiando con el único objetivo de conseguir una acreditación profesional y no era objetivo de aquel curso prepararles para seguir estudiando ciencia en el futuro: no existía una función prepedética en aquellos estudios. En la secundaria superior ginebrina, así como en el bachillerato español, sí que existe esa necesidad de formar a los estudiantes para continuar con un futuro académico. La enseñanza de las matemáticas debe estar enfocada sobre todo a fomentar en los estudiantes un espíritu científico, crítico y deductivo (eso cree el que aquí escribe) pero la función propedéutica de la enseñanza a ese nivel no puede tomarse a la ligera; más aún, debe tenerse muy en cuenta. Los estudiantes que acaben su formación preuniversitaria y empiecen sus estudios universitarios en una facultad de ciencias se encontrarán, con casi toda probabilidad, ante un análisis matemático basado en epsilon-delta. En el Decreto vigente encargado de regular el currículo de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, por ejemplo, se dice:

> Las Matemáticas de Bachillerato tienen una doble finalidad ya que, por una parte, suponen la culminación de un largo proceso destinado a desarrollar en los alumnos la capacidad de razonamiento y el sentido crítico necesario para interpretar la realidad desde posiciones exentas de dogmatismo y dotarles de las herramientas adecuadas para resolver los problemas cotidianos con los que deberán enfrentarse una vez alcanzada la etapa de madurez y, además, deben servir de preparación para que, estos mismos alumnos, puedan continuar sus estudios en los ciclos superiores de formación profesional o en la universidad [1, p. 28107].

Además en el caso español debe estar muy presente, al menos a día de hoy, que tras la finalización del bachillerato los estudiantes que deseen ingresar en una universidad deben superar una prueba externa (la Prueba de Acceso a la Universidad, PAU) que está escrita y corregida por profesores que posiblemente ni conozcan de la existencia del análisis no estándar. De no poderse resolver estos problemas estaríamos ante un escollo insuperable que haría imposible, o al menos muy arriesgada, la implantación del análisis no estándar en las aulas. En Ginebra este segundo problema no existe. El análogo ginebrino a nuestra PAU se realiza en el mismo centro donde se cursó los estudios. El examen es escrito por el profesor de cada grupo (aunque es revisado, antes de tener el visto bueno, por un coordinador general que contrasta las pruebas de los diferentes institutos para evitar desigualdades).

Sin embargo, en el CEC André-Chavanne se enseña de modo efectivo usando el análisis con ultrapequeños y sus estudiantes llegan a las facultades y son capaces de estudiar ciencia (el profesor O'Donovan nos habló de un estudiante que actualmente estudia matemáticas en la Universidad de Ginebra). Según los profesores de CEC André-Chavanne que entrevisté, todos los casos de estudiantes educados en su instituto y con ese análisis que conocen están obteniendo, o han obtenido ya, magníficos resultados en todo tipo de carreras de ciencias.

Pero, ¿cómo consiguen en el CEC André-Chavanne que sus alumnos puedan empezar una carrera basada en un cálculo hecho enteramente con ε-δ? Richard O'Donovan y otros profesores de matemáticas de su departamento me explicaron en qué consistía su compromiso con esos estudiantes. Los profesores encargados de la enseñanza de las matemáticas en el programa bilingüe del centro dedican las últimas clases del curso a explicarle a sus estudiantes que fuera del análisis con ultrapequeños hay “otro mundo” con el que muy probablemente se encuentren en los próximos años de su formación. Pero se les trasmite a esos alumnos que no deben temer a ese “nuevo mundo”, de hecho ése puede entenderse dentro del “suyo”. Ese discurso no es un simple *brindis al sol;* los profesores se encargan de hacer una suerte de diccionario de traducción entre los conceptos importantes como los de límite, continuidad o derivabilidad en términos del análisis con ultrapequeños y esos mismo conceptos en términos epsilon-delta. Y más aún, Richard O'Donovan me explicó que incluso se les intenta hacer la demostración de la equivalencia entre las parejas de definiciones y, cuando tienen tiempo, enseñan la demostración de alguna propiedad sencilla, cuya demostración ya conozcan con ultrapequeños, ahora con técnicas ε-δ para que las comparen.

5. Reflexión final

Hemos presentado una experiencia educativa de enseñanza del análisis matemático en la educación secundaria superior de Ginebra. La posibilidad de implementación de una experiencia educativa como esta no se explica sino por las singularidades que tiene el modelo educativo suizo.

Suiza es una federación de veintitrés cantones con veintitrés sistemas educativos diferentes. En el cantón de Ginebra, las condiciones “macroeducativas” destacables son:

- Un estudiante debe cursar, como mínimo, trece años de educación preuniversitaria: nueve años de educación obligatoria (de los cuales seis son de educación primaria y tres de educación secundaria) y cuatro años de “collège” (18-19 años al terminar la educación preuniversitaria).

- En los años de “collège” los estudiantes reciben, en jornada continua, ocho sesiones de cuarenta y cinco minutos al día.

- En los dos primeros años de “collège” todos los estudiantes cursan matemáticas (con el mismo nivel) de forma obligatoria. En los dos últimos cursos, los estudiantes siguen realizando matemáticas de forma obligatoria pero en dos niveles distintos: matemáticas de nivel normal (M1) o matemáticas de nivel avanzado (M2)

- Los estudiantes del nivel normal M1 (respectivamente del nivel avanzado M2) reciben cuatro sesiones (respectivamente ocho sesiones) de cuarenta y cinco minutos a la semana agrupadas en grupos de dos sesiones consecutivas en días distintos. En la figura 1 (respectivamente en las figuras 2 y 3) presentamos un esquema resumen con los contenidos que en un tal curso se deben cubrir en el área del análisis matemático.

- El currículo exige que los estudiantes conozcan las demostraciones de los teoremas fundamentales (estudiados en el nivel) del análisis matemático.

- Los exámenes a los que los estudiantes deben enfrentarse al terminar el “collège” son escritos y evaluados por profesores del mismo centro. Un supervisor externo se encarga de que los exámenes sean justos, de nivel homogéneo y que el proceso de evaluación sea serio y de garantías.

Estas peculiaridades del sistema ginebrino no se dan en el sistema educativo español. Fijémonos por ejemplo en la última de las propiedades listadas anteriormente. Aunque el currículo es común en todo el cantón de Ginebra y por ende los enunciados de las pruebas terminales en cada instituto debería ser abordables por cualquier estudiante (independientemente del centro en el que haya cursado sus estudios), son los propios profesores quienes (en examen público y oral y bajo la supervisión de un segundo evaluador externo) están encargados de evaluar a sus propios estudiantes. Como consecuencia, ante un enunciado del tipo “demuestre que la siguiente función (…) es derivable”, un estudiante puede responder con terminología de infinitésimos o con terminología de ε-δ en función de la aproximación educativa con la que haya cursado sus años de “collège”. Es decir, un estudiante de Richard O'Donovan no parte de desventaja frente a un estudiante de un centro educativo diferente.

Es obvio, en contraposición a lo que ocurre en Ginebra, que la rigidez de las pruebas terminales de bachillerato en España (PAU) hacen complicada (sino imposible) la implementación (en toda su extensión) de una aproximación al análisis no estándar como la realizada por Richard O'Donovan en un centro español. Como objetivo más limitado ¿sería posible trabajar esta aproximación al análisis con alumnos en los trabajos de investigación que exigen realizar las nuevas modalidades de bachillerato que empiezan a funcionar en España? (La Comunidad Autónoma de la Región de Murcia (España) se viene ofreciendo, desde el curso académico 2007/2008, una nueva modalidad de bachillerato: el Bachillerato de Investigación. El objetivo principal de esta nueva modalidad de bachillerato es proporcionar a los alumnos una formación de excelencia y una preparación más rigurosa y científica sobre las distintas materias, acercándoles de una manera práctica y amena a la metodología de la investigación). Más concretamente, ¿podría ser enriquecedor para un estudiante, en el segundo curso de uno de esos programas de bachillerato, estudiar el análisis matemático en el formato usual y al mismo tiempo tener una visión alternativa (en una aproximación del análisis no estándar como la impartida por Richard O'Donovan) de los conceptos de límite, continuidad, derivabilidad...?

Referencias bibliográficas:

[1] Boletín Oficial de la Región de Murcia (2008): “Decreto n.º 262/2008, de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia”. Boletón Oficial de la Región de Murcia, Murcia (España).

[2] Boyer, C. B. (1949): “The history of the calculus and its conceptual development”. Dover Publications, Nueva York (Estados Unidos).

[3] Dauben, J. W. (1988): “Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosphy, and Foundation of Mathematics. History and Philosophy of Modern Mathematics”. University of Minnesota Press, 177-200, Minnesota (Estados Unidos).

[4] Dèpartement de l'instruction publique (2007): “Plan d'etudes
Ginebra: Rèpublique et Canton de Geneve”. Dèpartement de l'instruction publique, Ginebra (Suiza).

[5] Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., Zoulinaki, F. (2009*). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact in the concept of “didactic contract”. International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 765-790.

[6] Guillera, J. (1993): “Cálculo infinitesimal moderno:(no estandar)”. J. Guillera D. L., Zarragoza (España).

[7] Hrbacek, K. (2007): “Stratified analysis?”. En “The strength of nonstandard analysis” (pp. 47-63). Springer. Nueva York (Estados Unidos).

[8] Hrbacek, K. (2009). “Relative set theory: Internal view”. Journal of Logic and Analysis, 1, 1-108, (Estados Unidos).

[9] Hrbacek, K.; Lessmann, O; O'Donovan, R. (2014): “Analysis with Ultrasmall Numbers”. CRC Press, (Estados Unidos).

[10] Ivorra, C. (2008): “Análisis no estándar”. Universidad de Valencia, Valencia (España).

[11] Luna, M.(1994):”La ley de continuidad en G. M. Leibniz”. Tesis de la Facultad de Filosofía, Universidad de Sevilla, Sevilla (España).

[12] Lutz, R.; Makhlouf, A.; Meyer, E. (1996): “Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur: les réels dévoilés”. APMEP, Paris (Francia).

[13] Nelson, E. (1977): “Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis”. Bulletin of the American Mathematical Society, 83, 1165-1198 (Estados Unidos).

[14] O'Donovan, R.(2007). “Pre-university analysis”. En “The Strength of Nonstandard Analysis” (pp. 395-401). Springer. New York (Estados Unidos).

[15] Péraire, Y. (1992): “Théorie relative des ensembles internes”. Osaka Jounal of Mathematics, 29, 267-297, Osaka (Japón).

[16] Robinson, A. (1996): “Non-standard analysis”. Princeton University Press, Nueva Jersey (Estados Unidos).

[17] Sánchez-Pedreño, S.; Vera, G. (2002): “Introducción al desarrollo histórico de los conceptos y técnicas del cálculo infinitesimal”. Universidad de Murcia, Murcia (España).

[18] Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, 6, 5–67, Paris (Francia).