EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT
Y
EL BINOMIO DE NEWTON

Juan de Dios García Martínez

juande3@grafowin.es

Resumen

El núcleo central del presente trabajo es la demostración de que: "*si se elimina el término x^n del desarrollo, según Newton, de un binomio $z = x + y_1$ de orden $n > 2$, la expresión resultante nunca puede ser, en el campo de los números enteros positivos, una potencia de orden n*",

El razonamiento demostrativo comienza con una partición de un número natural z, en dos sumandos, $(z = x + y_1)$, para terminar descubriendo tres tipos de particiones, de un mismo z, como posibles soluciones de la Relación de Fermat.

Como consecuencia de dicho proceso de parametrización, se dispone de dos vías de avance: Una que da lugar al uso del Método de Descenso Infinito y otra, estrictamente algebraica, consistente en introducir las expresiones obtenidas para x, y, z, en $[\mathrm{x}^\mathrm{n} + \mathrm{y}^\mathrm{n} = \mathrm{z}^\mathrm{n}]$

Palabras clave: Fermat, Teorema, Último.

0.- Estructura del razonamiento demostrativo

El núcleo central del presente trabajo es la demostración de que: "*si se elimina el término x^n del desarrollo, según Newton, de un binomio $z = x + y_1$ de orden $n > 2$, la expresión resultante nunca puede ser, en el campo de los números enteros positivos, una potencia de orden n*", lo que equivale, primero, a la imposibilidad de la Relación de Fermat para $n > 2$ y, después (y sólo después), a la demostración de la Conjetura de Beal y a la veracidad de la propuesta de Catalan.

La identificación de la Relación de Fermat como un problema particular del Binomio de Newton es de gran utilidad ya que, intentando que se cumpla que $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = y^n$, para $n > 2$, se llega a la conclusión de que tal cosa es imposible.

El razonamiento demostrativo comienza con una partición[1] de un número natural z, en dos sumandos, $(z = x + y_1)$, para terminar descubriendo tres tipos de particiones, de un mismo z, como posibles soluciones de la Relación de Fermat. La estructura que adopta cada una de las parametrizaciones es la siguiente:

1. $z = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n$
2. $z = n^s h_2 \left(y_{112} k_2 + n^{s(n-1)-1} h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n$
3. $z = h_3 (n^s y_{12} k_3 + h_3^{n-1}) + n^{sn-1} y_{12}^n$

El conocimiento de cada una de estas particiones conlleva el conocimiento de unas primeras expresiones finales de los elementos de partida, *x* e y_1.

Como consecuencia de dicho proceso de parametrización, se dispone de dos vías de avance:

1. En una, al intentar ampliar el proceso de parametrización (convirtiendo la partición tipo 1 en otra de tipo 2 (o viceversa)), aparece la necesidad de que se cumpla la Relación de Fermat en números enteros positivos más pequeños, lo que resulta imposible en el campo de los números naturales.

2. En la otra, al introducir las expresiones obtenidas para x, y, z, en $[x^n + y^n = z^n]$, se comprueba que es imposible que se cumpla la Relación de Fermat ya que no cabe eliminar por completo, en la ecuación polinómica resultante, los coeficientes irracionales.

Utilizando el lenguaje figurativo del profesor Ángel del Río Mateos en su obra "*El reto de Fermat*" (editorial "Ciencia Abierta"): si los trabajos de Gauss supusieron un vuelo en globo, los de Kummer volar en una flota aérea y los de Wiles (y otros) subir a una nave espacial, el trabajo que aquí se propone es volver a tierra y, más concretamente, a la tierra y época de Fermat.

Quizás, por eso, la presente demostración adolece de contar con pocas citas de trabajos y autores que hayan servido de apoyo.

1.- Propiedades que se deducen del enunciado del Teorema de Wiles_Fermat

A pesar de que está demostrado*, a partir de los trabajos de Andrew Wiles,* que la Relación de Fermat es imposible en el campo de los números naturales (lo que ha supuesto transformar la vieja Conjetura de Fermat en Teorema), el método aquí utilizado exige comenzar adoptando la hipótesis de que existen ternas, en números enteros positivos[2] o naturales, que satisfacen la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$.

Partiendo del supuesto de la existencia de soluciones se deducen unas pocas propiedades, todas ellas bien conocidas, que permiten simplificar el razonamiento demostrativo, sin pérdida de generalidad.

Tales propiedades son las siguientes:

1. Siempre se cumple que $x + y > z$ puesto que $(x + y)^n > x^n + y^n = z^n$.
2. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que, partiendo del supuesto de que (x, y, z) cumplen la Relación de Fermat, no tienen factores comunes dos a dos, lo que equivale a que el máximo común divisor de cada par de términos de la Relación de Fermat, es la unidad. Si (x, y, z) tuvieran un factor *m* común, es decir, $(x, y, z) = (mx_1, my_1, mz_1)$, entonces $(x^n + y^n = z^n) \gg (x_1^n + y_1^n = z_1^n)$, después de eliminar el término común m^n.
3. El exponente $n > 2$ se puede suponer que es un número primo ya que, si $n = m \times p$, entonces $(x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$. Por tanto, si la Relación de Fermat no se cumple para un n, número primo, tampoco se cumple para ninguno de sus múltiplos.
4. La reducción de la demostración al campo de los números naturales está justificada ya que, la extensión al cero y al campo de los números enteros negativos, produce::
   a. Soluciones triviales $[0^n + 0^n = 0^n,\ x^n + 0^n = z^n, \text{con } x = z]$
   b. Soluciones no válidas $[x^n + y^n = (-z)^n]$
   c. Soluciones reducibles a soluciones enteras positivas $[(-x)^n + (-y)^n = (-z)^n \gg x^n + y^n = z^n]$ $[x^n + (-y)^n = z^n$ >> $x^n = y^n + z^n]$, $[x^n + (-y)^n = (-z)^n \gg y^n = x^n + z^n]$.
5. Dada la simetría que guardan los comportamientos de x e y en la Relación de Fermat, basta con estudiar uno de los dos casos, para dar por terminado el razonamiento demostrativo.

2.- Transformación de la Relación de Fermat en un problema del Binomio de Newton

2.1 Teorema del Binomio "decapitado"

"Para que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ tenga solución en números enteros positivos, es condición necesaria y suficiente que, para algún entero positivo z, exista una partición $z = x + y_1$ tal que si, en el desarrollo de la potencia de $(x + y_1)^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = z^n$, se elimina el término x^n, la expresión resultante sea, también, una potencia de orden n de un número entero positivo; es decir: tendría que cumplirse que $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = y^n$.

2.2.- Formalización de las relaciones entre las variables $(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de la Relación de Fermat y las nuevas $(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{h}, \mathbf{k})$ del Binomio de Newton

2.2.1.- La diferencia $(\mathrm{x}^{\mathrm{n-i}} - \mathrm{y}_2^{\mathrm{n-i}})$ es el elemento que posibilita la transformación de una suma, en un producto

El que, en la Relación de Fermat $[x^n + y^n = z^n]$, se cumpla que $x + y > z$, implica que existe una partición de $z = x + y_1$ que hace que, en virtud del Binomio de Newton, $x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = z^n$.

La transformación del problema que plantea la Relación de Fermat, en un problema del Binomio de Newton, supone admitir que $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = y^n$, lo que conlleva que $y^n > y_1^n$, $y > y_1$ y, por tanto, que siempre existe una partición $y = y_2 + y_1$ /3/.

Elevando, al exponente *n*, los dos miembros de la anterior igualdad, y efectuando el correspondiente desarrollo, se tiene que $y^n = y_2^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} y_2^{n-i} y_1^i$.

Igualando, el segundo término de esta última expresión, con el primero de $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = y^n$, se genera una ecuación que pone en relación (x, y_2, y_1) tal como $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y_1^i = y_2^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} y_2^{n-i} y_1^i$, lo que implica que $y_2^n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} y_1^i (x^{n-i} - y_2^{n-i})$, después de eliminar el término y_1^n.

2.2.2.- Transformación de una relación en términos de suma, en otra en forma de producto

Dado que, en la expresión $y_2^n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} y_1^i (x^{n-i} - y_2^{n-i})$, para $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n} - 1$, se cumple que $x^{n-i} - y_2^{n-i} = (x - y_2) \sum_{j=0}^{n-i-1} x^{n-i-1-j} y_2^j$ y que $\frac{1}{n} \binom{n}{i} = \frac{(n-1)!}{(n-i)!i!}$ /4/ sigue siendo un número natural, resulta que y_2^n se puede expresar en forma de un producto de números naturales tal que $y_2^n = n y_1 h k$, con $h = x - y_2$ y $k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{i} y_1^{i-1} \sum_{j=1}^{n-i} x^{n-i-j} y_2^{j-1}$, cuyo desarrollo es:

$$[x^{n-2} + x^{n-3} y_2 + \cdots + x y_2^{n-3} + y_2^{n-2}] + \frac{1}{n} \binom{n}{2} y_1 [x^{n-3} + x^{n-4} y_2 + \cdots + x y_2^{n-4} + y_2^{n-3}] \ldots + \frac{1}{n} \binom{n}{n-2} y_1^{n-3} [x + y_2] + y_1^{n-2} = k$$

Como caso particular se tiene que, cuando $n = 2$, entonces $y_2^2 = 2 y_1 h$, ya que $k = 1$. Ello hace posible que existan las llamadas soluciones pitagóricas.

2.3.- Propiedades que se deducen de la transformación de la Relación de Fermat en un problema del Binomio de Newton

De la relación $y_2^n = 2 y_1 h k$ se deducen algunas propiedades que han de cumplir (y_2, y_1, h, k), a fin de que, (prefijado *z*) los términos (x, y_1), de las particiones binarias de $(z = x + y_1)$, sigan cumpliendo los supuestos que pueden hacer posible que del desarrollo de un binomio, "*decapitado*" del término en *x*, se convierta en una potencia de orden *n*.

Proposición 1: *Los términos y_1, h y k son números enteros positivos, coprimos, dos a dos.*

1. *Caso de y_1 con h:*

Dado que y_1 divide a y_2^n, si tuviese factores comunes con $h = x - y_2$, también los tendría con *x*, en contra de uno de los supuestos de partida. Consecuencia de ello, dado que $z = x + y_1$, resultaría que *x* y *z* no serían coprimos.

2. *Caso de y_1 con k:*

Tampoco y_1 tiene factores comunes con $k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{i} y_1^{i-1} \sum_{j=1}^{n-i} x^{n-i-j} y_2^{j-1}$ ya que, en tal caso, los tendría, igualmente, con *x*.

Para hacer evidente este hecho conviene agrupar los sumandos que definen a *k*, de la forma siguiente:

$x^{n-2} + y_2[x^{n-3} + \cdots + xy_2^{n-4} + y_2^{n-3}] +$

$$y_1\left\{\frac{1}{n}\binom{n}{2}[x^{n-3} + x^{n-4}y_2 + \cdots + xy_2^{n-4} + y_2^{n-3}] + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n-2}y_1^{n-4}[x + y_2] + y_1^{n-3}\right\} = k$$

Basta observar que si *k* tuviese factores comunes con y_1, al compartirlos, también, con $y_2^n = 2y_1hk$, necesariamente, los tendría con *x*.

3. *Caso de h con k*

Finalmente, *h* y *k*, no pueden tener factores comunes entre sí ya que, en caso afirmativo, al compartirlos con $y_2^n = ny_1hk$, necesariamente, los estaría compartiendo con *x*, dado que $h = x - y_2$. Por otra parte, *h*, también, tendría factores comunes con y_1, ya que, al ser

$x\left\{x^{n-3} + x^{n-4}y_2 + \cdots + y_2^{n-3} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}y_1[x^{n-4} + x^{n-5}y_2 + \cdots + y_2^{n-4}] + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n-2}y_1^{n-3}\right\} + y_2\left\{y_2^{n-3} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}y_1y_2^{n-4} + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n-2}y_1^{n-3}\right\} + y_1^{n-2} = k$

y tener factores comunes con *x* e y_2, tendría factores comunes con y_1, en contra de los supuestos de partida.

Proposición 2: *El término y_1, necesariamente, ha de adoptar una de las dos formas siguientes: $y_1 = y_{11}^n$ o $y_1 = n^{ns-1}y_{12}^n$, con y_{11} e y_{12} números enteros positivos. Consecuencia de ello, surgen, como posibles, tres tipos de particiones de z.*

Para que y_2 sea un número natural es necesario que la terna (y_1, h, k), que forma parte de la expresión $y_2^n = ny_1hk$, complete la potencia *n_ésima*, de *n*, o un múltiplo de ella. Es evidente que, cuando dicho factor proceda de *h* y/o de *k*, entonces $y_1 = y_{11}^n$. En caso contrario, se ha de cumplir que $y_1 = n^{ns-1}y_{12}^n$, con $s > 0$. La introducción del formato $(ns - 1)$ para el exponente de *n* supone forzar a que y_{12} no sea divisible por *n*, aunque no siempre se consigue, ya que puede quedar, formando parte de la base, un n^r, con $r < n - 1$.

1. *Particiones tipo 1 y 2*:

Cuando $y_1 = y_{11}^n$, es obligado que $h = h_1^n$ y $k = n^{ns-1}k_1^n$ /[5]*/ o $h = n^{ns-1}h_2^n$ y $k = k_2^n$, con $s > 0$, lo que hace que $z = h_1(n^sy_{111}k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n$ o $z = n^sh_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n$, siendo todos los parámetros números enteros positivos.*

Partiendo de que, por la *Proposición 2*, no hay factores comunes entre *h* y *k*, resulta que la expresión $y_2^n = ny_{11}^nhk$, tras sustituir los valores de *h* y *k* por sus diferentes expresiones, se convierte en $y_2 = n^sy_{11}h_1k_1$ o $y_2 = n^sy_{11}h_2k_2$ o, mejor, en $y_2 = n^sy_{111}h_1k_1$ o $y_2 = n^sy_{112}h_2k_2$ ya que, al ser distintos los valores de h_i y k_i, , también, lo son los de *x*, por lo que también lo son los valores de y_{11}, a fin de que no varíen los de *z*. Esta propiedad se aclara, con mayor detalle, en la *Proposición 3*.

Conviene decir que, el caso anterior, incluye, también, el supuesto cuando el valor de y_2 no se ve afectado por el cambio de valor de *h* y *k* al ser $n^{ns-1}k_1^n = n^{ns-1}h_2^n$ y $h_1^n = k_2^n$, en cuyo caso lo que se produce es, tan sólo, un intercambio de rol entre *h* y *k*, manteniéndose su aportación a y_2 en forma de n^{ns-1}.

Por tanto, la expresión $x - y_2 = h_1^n$ se convierte en $x - n^sy_{111}h_1k_1 = h_1^n$ y la expresión $x - y_2 = n^{ns-1}h_2^n$, en $x - (n^sy_{112}h_2k_2) = n^{ns-1}h_2^n$.

Como consecuencia de ello z ha de adoptar la forma de: $z = h_1(n^sy_{111}k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n$ o $z = n^sh_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n$.

Las particiones de tipo 1 no existen cuando $n = 2$, ya que, en tal caso, al ser $k = 1$, el primer supuesto según el cual $h = h_1^n$ y $k = n^{ns-1}k_1^n$, no ha lugar.

2. *Particiones tipo 3:*

Cuando $y_1 = n^{ns-1}y_{12}^n$, es obligado que $h = h_3^n$ y $k = k_3^n$, lo que hace que $z = h_3(n^sy_{12}k_3 + h_3^{n-1}) + n^{ns-1}y_{12}^n$, siendo todos los parámetros números enteros positivos.

Partiendo de que, por la *Proposición 2*, no hay factores comunes entre *h* y *k*, resulta que $y_2 = n^sy_{12}h_3k_3$, con $s > 0$ y, por tanto, la expresión $x - y_2 = h$ se convierte en $x - n^sy_{12}h_3k_3 = h_3^n$ y $z = h_3(n^sy_{12}k_3 + h_3^{n-1}) + n^{ns-1}y_{12}^n$.

***Proposición 3**: El supuesto inicial de que el componente $y_1 = y_{11}^n$, toma el mismo valor, tanto en las particiones de tipo 1 como en las de tipo 2, no puede seguir manteniéndose, por lo que se convierten en dos valores distintos $(y_{111} \neq y_{112})$.*

De seguir manteniendo el supuesto de partida de $y_1 = y_{11}^n$, toma el mismo valor en las particiones de z, tanto de tipo 1 $[z = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n]$ como de tipo 2 $\left[z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$, no hubiera sido necesario poner dos símbolos distintos para el término en *y*. En cambio es obligado hacer dicha distinción ya que, en caso contrario, resultaría que los valores de la *x*, en cada una de las particiones, $[h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1})]$ y $\left[n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right)\right]$, tendrían que ser iguales, a fin de que las particiones de tipo 1 y tipo 2 sigan siendo particiones de un mismo *z*. Pero es evidente que los términos en *x* de uno y otro tipo de particiones son distintos ya que, siendo única la descomposición de un número en factores primos, mientras, el término en *x* de las particiones de tipo 2 es un múltiplo de un número primo (el exponente *n* lo es), resulta que, el término en *x* de las particiones de tipo 1, no es divisible por *n*. Por tanto, necesariamente, se ha de cumplir que $h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) \neq n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right)$, lo que, para que las particiones de tipo 1 y tipo 2 sean particiones de un mismo *z*, obliga a que, en el primer caso $y_1 = y_{111}^n$ y, en el segundo $y_1 = y_{112}^n$, siendo $(y_{111} \neq y_{112})$.

Este problema no se da cuando $n = 2$ ya que, en tal caso, las particiones de tipo 1 no existen, como ha quedado aclarado al hablar, en la *Proposición 2*, de la generación de las particiones de tipo 1 y 2.

2.4.- Relaciones fundamentales entre los diferentes tipos de particiones

De forma esquematizada, la tipología de particiones es la siguiente:

1. $y_1 = y_{11}^n$

1.1. $z = x + y_{11}^n$ e $y = y_2 + y_{11}^n$

1.1.1. $h = h_1^n$ y $k = n^{ns-1}k_1^n$

1.1.1.1. $y_2 = n^s y_{111} h_1 k_1$ (Particiones tipo 1)

1.1.1.1.1. $x = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1})$

1.1.1.1.2. $y = y_{111}(n^s h_1 k_1 + y_{111}^{n-1})$

1.1.1.1.3. $z = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n$

1.1.2. $h = n^{ns-1}h_2$ y $k = k_2^n$

1.1.2.1. $y_2 = n^s y_{112} h_2 k_2$ (Particiones tipo 2)

1.1.2.1.1. $x = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right)$

1.1.2.1.2. $y = y_{112}(n^s h_2 k_2 + y_{112}^{n-1})$

1.1.2.1.3. $z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n$

2. $y_1 = n^{ns-1}y_{12}^n$

2.1. $z = x + n^{ns-1}y_{12}^n$ e $y = y_2 + n^{ns-1}y_{12}^n$

2.1.1. $h = h_3^n$ y $k = k_3^n$

2.1.1.1. $y_2 = n^s y_{12} h_3 k_3$ (Particiones tipo 3)

2.1.1.1.1. $x = h_3(n^s y_{12} k_3 + h_3^{n-1})$

2.1.1.1.2. $y = n^s y_{12}\left(h_3 k_3 + n^{(n-1)s-1}y_{12}^{n-1}\right)$

2.1.1.1.3. $z = h_3(n^s y_{12} k_3 + h_3^{n-1}) + n^{ns-1}y_{12}^n$

A partir de las expresiones que definen cada uno de los tipos de particiones, se deducen unas nuevas propiedades que terminan poniendo en relación los parámetros de unos tipos de particiones con otros.

Si dos particiones, lo son de un mismo número, necesariamente, ha de existir la posibilidad de transformar una partición en otra.

Es el estudio de las relaciones entre tipos de particiones lo que permite demostrar, por dos vías diferentes, la imposibilidad de la propiedad buscada para el binomio de Newton y, como consecuencia de ello, la imposibilidad de la Relación de Fermat.

El primer método de demostración constituye una continuación del *proceso de parametrización* anterior, aunque, en esta ocasión, aparece ligado a la necesidad de que, si del termino en *x* de una partición de tipo 1 se puede generar el termino en *x* de una partición de tipo 2 (y viceversa), dado que z toma el mismo valor en cada uno de los tipos de particiones, es evidente que, los términos residuales de las particiones tipos 1 y 2 tendrían que igualarse. Ahora bien, como se verá en el próximo apartado, ello obliga a que se cumpla la Relación de Fermat, pero en números más pequeños, lo que permite aplicar el razonamiento propio del método de descenso infinito, ideado por el propio Fermat.

El segundo método consiste en una simple operación algebraica de sustitución, en la Relación de Fermat, de los valores de la (x, y, z) por las expresiones que les corresponden. El resultado es una ecuación polinómica con coeficientes irracionales de imposible completa desaparición, incluso, cuando $n = 3$.

2.5.- Esquema final del razonamiento demostrativo

Una vez descubiertos los únicos tres tipos de particiones, de un mismo *z*, capaces de proporcionar soluciones de la Relación de Fermat cabe plantearse qué *incrementos* y *disminuciones* hay que hacer en los términos de cada uno de los tres tipos de particiones para que se transformen en cada uno de los otros dos.

Esta primera vía de avance constituye una continuación del *proceso de parametrización* anterior, aunque, en esta ocasión, aparece ligado a la necesidad de que, si del termino en *x* de una partición de tipo 1 se puede generar el termino en *x* de una partición de tipo 2 (y viceversa), dado que z toma el mismo valor en cada uno de los tipos de particiones, es evidente que, los términos residuales de las particiones tipos 1 y 2 tendrían que igualarse.

Ello permitiría descubrir, al menos, nuevos criterios de parametrización al encontrar nuevas relaciones entre los parámetros de una y otras particiones.

De dicho estudio se llega a la conclusión de que las particiones de tipo 2 y 3 son equivalentes ya que basta con intercambiar el significado de los parámetros de una y otra expresión. En cambio, se demuestra que se podría transformar una partición tipo 1 en otra de tipo 2 (y viceversa), si se pudiera cumplir la Relación de Fermat entre números más pequeños. Ahora bien, de acuerdo con el método de descenso infinito, tal cosa es imposible en el campo de los números naturales.

Las consecuencias de este hecho son dos:

1. Si existe una partición de tipo 1 no existe una de tipo 2 (y viceversa).
2. La razón de esta imposibilidad se deriva, precisamente, de que se ha de cumplir la Relación de Fermat, en números más pequeños.

La combinación de estos dos hechos hace que, al ser imposible la Relación de Fermat, es, igualmente, imposible que ninguna de las tres particiones sirva para generar una solución de Fermat.

Aunque con esta vía de demostración sería suficiente, se ha desarrollado una vía alternativa, en la que se demuestra, que elevando a la *n_ésima* potencia *z* y las expresiones obtenidas para *x* e *y*, se genera una ecuación de coeficientes irracionales que no tiene solución en números naturales.

3.- Demostración por el método de descenso infinito, ideado por el propio Fermat

3.1.- Las particiones de tipo 2 y 3 son transformables unas en otras

Si z contiene una partición $\left[z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$ *de tipo 2, contiene, también, una partición* $[z = h_3(n^s y_{12}k_3 + h_3^{n-1}) + n^{ns-1}y_{12}^n]$ *de tipo 3 (y viceversa).*

De una partición de tipo 2 $\left[z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$ se puede obtener, por simple reagrupamiento de los términos que la integran, otra de tipo 3, aunque con los símbolos de las particiones de tipo 2 $[z = y_{112}(n^s h_2 k_2 + y_{112}^{n-1}) + n^{ns-1}h_2^n]$.

Con sólo hacer $y_{112} = h_3$ y $h_2 = y_{12}$ se obtiene, por simple sustitución, la expresión propia de las particiones de tipo 3 $[z = h_3(n^s y_{12}k_3 + h_3^{n-1}) + n^{ns-1}y_{12}^n]$. El proceso inverso es inmediato.

La consecuencia de esta propiedad es que, si para un *z* dado, existe una partición de tipo 2 en el campo de los números naturales, también existe una partición de tipo 3, y viceversa. Esta propiedad hace que sólo quede por estudiar las relaciones entre las particiones de tipo 1 y 2.

3.2.- Las particiones de tipo 1 no se pueden convertir, en el campo de los números naturales, en particiones de tipo 2

Al intentar convertir una partición $[z = h_1(n^s y_{111}k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n]$ *de tipo 1 de un número natural z, en otra* $\left[z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$ *de tipo 2, basta con hacer un simple reagrupamiento de términos, de forma que la partición de tipo 1 se convierte en* $[z = n^s h_1 y_{111}k_1 + (h_1^n + y_{111}^n)]$*.*

La anterior expresión se caracteriza porque su primer sumando $[n^s h_1 y_{111}k_1]$ es un número natural, múltiplo de *n*, por lo que es evidente que la transformada es ahora una partición de tipo 2. Consecuencia de dicha igualdad obliga a que $h_1^n + y_{111}^n = y_{112}^n$, con h_1, y_{111} *e* y_{112} números enteros positivos.

Es evidente que si se hace: $n^s h_1 y_{111}k_1 = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right)$, se tendría que cumplir que $h_1^n + y_{111}^n = y_{112}^n$, lo que haría posible que $x^n + y^n = z^n$. Ahora bien, con independencia de la mayor o menor facilidad para encontrar valores que igualen los dos términos anteriores, resulta imposible encontrar una terna h_1, y_{111}, y_{112} que cumpla la Relación de Fermat $h_1^n + y_{111}^n = y_{112}^n$, ya que habría que repetir, una y otra vez, el mismo proceso realizado hasta ahora, cosa imposible en el campo de los números naturales.

A título de ejemplo, haciendo $n = 3,\ s = 1,\ h_2 = 5,\ y_{112} = 13,\ k_2 = 7$, se tendría que: $n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) = 3 \cdot 5(13 \cdot 7 + 3 \cdot 5^2 = 2490 = x$ y $z = 2490 + 13^3 = 4687$ y, en consecuencia, $y_1 = 13^3 = 2197$

Si se hace $n = 3,\ s = 1,\ h_1 = 5,\ y_{111} = 83,\ k_1 = 2$ se conseguiría que $n^s h_1 y_{111}k_1 = 3 \cdot 5 \cdot 83 \cdot 2 = 2490$, resultando, en cambio, imposible que $5^3 + 83^3 = 571912$ sea un cubo, e igual a 13^3, por la sencilla razón de que ello supondría que se estaría cumpliendo la Relación de Fermat, pero en números más pequeños, cosa imposible en el campo de los números naturales.

3.3.- Las particiones de tipo 2 no se pueden convertir, en el campo de los números naturales, en particiones de tipo 1

Toda partición $\left[z = n^s h_2\left(y_{112}k_2 + n^{(n-1)s-1}h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$ *de tipo 2 de un número natural z podría convertirse, con sólo sumar y restar* h_2^n *al segundo término de la anterior igualdad, en otra partición* $[z = h_1(n^s y_{111}k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n]$ *de tipo 1.*

La expresión resultante $z = h_2(n^s y_{112}k_2 + (n^{ns-1} - 1)h_2^{n-1}) + (h_2^n + y_{112}^n)$ de la anterior transformación se caracteriza porque su primer sumando $h_2(n^s y_{112}k_2 + (n^{ns-1} - 1)h_2^{n-1})$ es un número natural, no divisible por *n*. Ello hace que esta nueva partición tenga un primer término comparable con el primer término de las particiones $[z = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n]$ de tipo 1.

Es claro que la comparabilidad de tales expresiones es completa y directa, por lo que es inmediato llegar a la conclusión de que si, para un *z* dado, se hace que $h_2(n^s y_{112} k_2 + (n^{ns-1} - 1)h_2^{n-1})_1 = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1})$, entonces, se tendría que cumplir la Relación de Fermat en números más pequeños. Es decir, se tendría que cumplir que $h_2^n + y_{112}^n = y_{111}^n$, *con* h_2, y_{112} *e* y_{111} *números enteros positivos*, menores que los originales *x, y, z*, cosa imposible en el campo de los números naturales.

3.4.- Corolario: el juego de una nueva conjetura

El problema acerca de la posibilidad, o no, de conversión de las particiones tipo 1, en particiones tipo 2 se puede plantear como una "*Nueva Conjetura*", cuyo enunciado podría ser el siguiente:

Dadas dos particiones tales como $[z = h_1(n^s y_{111} k_1 + h_1^{n-1}) + y_{111}^n]$ *y* $\left[z = n^s h_2\left(y_{112} k_2 + n^{(n-1)s-1} h_2^{n-1}\right) + y_{112}^n\right]$ *es imposible que, en el campo de los números naturales, sean particiones de un mismo número z.*

Para ver la utilidad del juego que se propone hay que partir del supuesto de que no se conoce de dónde han salido las dos particiones elegidas.

En tales condiciones, cualquier investigador que trate de resolver el problema planteado, se encontrará con que, debe comenzar suponiendo que son particiones de un mismo número entero positivo *z*, lo que implica que cada partición se debe poder transformar en la otra.

Es sabido que, por simple reagrupamiento de los componentes del segundo término de la partición de tipo 1, se consigue un primer sumando que es completamente equiparable al primer componente del segundo término de la partición de tipo 2, es decir: $n^s y_{111} h_1 k_1 = z = n^s h_2\left(y_{112} k_2 + n^{(n-1)s-1} h_2^{n-1}\right)$. Ahora bien, al intentar convertir la partición tipo 1 en una partición tipo 2, es obligado que se cumpla la Relación de Fermat $h_1^n + y_{111}^n = y_{112}^n$.

Como, en este caso, no se sabría que el descubrimiento de tales particiones se deriva de suponer que se cumple la relación de Fermat, tan sólo apoyándose en la demostración de Wiles, se podría demostrar su imposibilidad.

En el razonamiento demostrativo utilizado en la presente propuesta de demostración, es, precisamente, el hecho de haber partido del supuesto de que se cumple la Relación de Fermat, lo que permite descubrir los diversos tipos de particiones que son condición necesaria para que una partición pueda ser solución de Fermat. Todo ese razonamiento es independiente de la demostración de Wiles, aunque sirve para proporcionar un argumento demostrativo independiente de la demostración de autor tan prestigiado.

Es evidente que, el problema que se ha planteado en los últimos apartados del presente escrito, se utiliza como pretexto la imposibilidad de convertir una partición tipo 1 en una de tipo 2 porque, en ella aflora la contradicción de que, para que se cumpla la Relación de Fermat con una terna de números naturales (punto de partida) es necesario que exista otra terna en números más pequeños, cosa imposible en el campo de los números naturales (punto de llegada).

No sucede lo mismo para el caso en que $n = 2$.

La forma en que se concretaría para la terna $(3,4,5)$, la solución de la relación pitagórica, adoptaría, las dos formas siguientes:

Cuando $z = 2h_2(y_{112} + h_2) + y_{112}^2$, resulta que $5 = 2 \times 1(1+1) + 1 = 4 + 1$.

Cuando $z = h_3(2y_{12} + h_3) + 2y_{12}^2$, resulta que $5 = 1(2 \times 1 + 1) + 2 \times 1 = 3 + 2$.

Es fácil comprobar que del desarrollo del binomio $5^2 = (4+1)^2$ se deduce que $5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1^2 = 4^2 + 3^2$. Igual sucede cuando $5^2 = (3+2)^2$ ya que $5^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 = 3^2 + 4^2$. Es decir, cuando *n = 2* un mismo número puede tener dos particiones que sirven para generar una misma relación pitagórica.

La transformación en función de *y* sería:

Cuando $z = y_{112}(2h_2 + y_{112}) + 2h_2^2$, resulta que $5 = 1(2 \times 1 + 1) + 2 \times 1 = 3 + 2$.

Cuando $z = 2y_{12}(h_3 + y_{12}) + h_3^2$, resulta que $5 = 2 \times 1(1 + 1) + 1 = 4 + 1$.

4.- Demostración algebraica

4.1.- Ternas pitagóricas

Cuando $n = 2$, sólo hay dos casos posibles, para cada uno de los cuales, es fácil deducir que existen las conocidas soluciones pitagóricas.

1. Primer caso

En el primer caso, coincidente con el segundo tipo de partición, se tiene que:

1. $y_1 = y_{11}^2$
   1.1. $z = x + y_{11}^2$ e $y = y_2 + y_{11}^2$
      1.1.1. $h = 2^{2s-1}h_2^2$
         1.1.1.1. $y_2 = 2^s y_{12} h_2$ *(Particiones tipo 2)*
            1.1.1.1.1. $x = 2^s h_2(y_{112} + 2^{s-1}h_2)$
            1.1.1.1.2. $y = y_{112}(2^s h_2 + y_{112})$
            1.1.1.1.3. $z = 2^s h_2(y_{112} + 2^{s-1}h_2) + y_{112}^2$

Por simple desarrollo de la expresión $z^2 = [2^s h_2(y_{112} + 2^{s-1}h_2) + y_{112}^2]^2$, se deduce que:

$$[2^s h_2(y_{112} + 2^{s-1}h_2) + y_{112}^2]^2 = [2^s h_2(y_{112} + 2^{s-1}h_2)]^2 + [y_{112}(2^s h_2 + y_{112})]^2$$

2. Segundo caso

En el segundo caso, coincidente con el tercer tipo de partición, se tiene que:

1. $y_1 = 2^{2s-1}y_{12}^2$
   1.1. $z = x + 2^{2s-1}y_{12}^2$ e $y = y_2 + 2^{2s-1}y_{12}^2$
      1.1.1. $h = h_3^2$
         1.1.1.2. $y_2 = 2^s y_{12} h_3$ (Particiones tipo 3)
            1.1.1.2.1. $x = h_3(2^s y_{12} + h_3)$
            1.1.1.2.2. $y = 2^s y_{12}(h_3 + 2^{s-1}y_{12})$
            1.1.1.2.3. $z = h_3(2^s y_{12} + h_3) + 2^{2s-1}y_{12}^2$

Por simple desarrollo de la expresión $z^2 = [h_3(2^s y_{12} + h_3) + 2^{2s-1}y_{12}^2]^2$, se deduce que:

$$[h_3(2^s y_{12} + h_3) + 2^{2s-1}y_{12}^2]^2 = [h_3(2^s y_{12} + h_3)]^2 + [2^s y_{12}(h_3 + 2^{s-1}y_{12})]^2$$

El estudio, cuando $s = 1$, de las ecuaciones $x = 2h_2(y_{112} + h_2)$ y $x = h_3(2y_{12} + h_3)$ permite encontrar como soluciones, de un lado, $h_2 = \frac{-y_{112} + \sqrt{y_{112}^2 + 2x}}{2}$ y, de otro, $h_2 = -y_{12} + \sqrt{y_{12}^2 + x}$, para lo que $y_{112}^2 + 2x = A^2$, en el primer caso, e $y_{12}^2 + x = B^2$, en el segundo.

4.2.- Ternas de Fermat

El hecho de haber llegado, en cada uno de los tipos de particiones, a expresar la terna (x, y, z) en función de (n, y_y, h_h, k_k) aconseja plantearse si, la suma de las potencias *n_ésimas*, de las correspondientes expresiones de *x* e *y*, permitirán demostrar que es igual a la potencia n_ésima de *z*. Como puede comprobarse en el anexo recogido en el apartado 4.1, dicha demostración es sencilla cuando $n = 2$, pero no lo es para el resto de casos.

Como puede comprobarse, en realidad, lo que se consigue es expresar $y_2^n = ny_1hk$ en función de una suma fruto de sustituir, en la relación $z^n - (x^n + y^n) = 0$, cada variable por la expresión que le corresponde. Si se simplifica dicha expresión lo que aparece es la definición de k_1.

Partiendo de que, en las particiones del tipo 1, $x^n = [n^s y_{111} h_1 k_1 + h_1^n]^n$, $y^n = [n^s y_{111} h_1 k_1 + y_{111}^n]^n$ y $z^n = [n^s y_{111} h_1 k_1 + (y_{111}^n + h_1^n)]^n$, es claro que:

1. El desarrollo de x^n es:

$$x^n = (n^s y_{111} h_1 k_1)^n + n(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-1} h_1^n + \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2} h_1^{2n} + \binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-3} h_1^{3n} + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^3 h_1^{n(n-3)} + \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^2 h_1^{n(n-2)} + n(n^s y_{111} h_1 k_1) h_1^{n(n-1)} + h_1^{n^2}$$

2. El desarrollo de y^n es análogo al de x^n, pero sustituyendo h_1^n por y_{111}^n:

$$y^n = (n^s y_{111} h_1 k_1)^n + n(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-1} y_{111}^n + \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2} y_{111}^{2n} + \binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-3} y_{111}^{3n} + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^3 y_{111}^{n(n-3)} + \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^2 y_{111}^{n(n-2)} + n(n^s y_{111} h_1 k_1) y_{111}^{n(n-1)} + y_{111}^{n^2}$$

3. El desarrollo de z^n es análogo a los anteriores pero con el nuevo elemento $(h_1^n + y_{111}^n)$:

$$z^n = (n^s y_{111} h_1 k_1)^n + n(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-1}(h_1^n + y_{111}^n) + \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2}(h_1^n + y_{111}^n)^2 + \binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-3}(h_1^n + y_{111}^n)^3 + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^3 (h_1^n + y_{111}^n)^{(n-3)} + \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^2 (h_1^n + y_{111}^n)^{(n-2)} + n(n^s y_{111} h_1 k_1)(h_1^n + y_{111}^n)^{(n-1)} + (h_1^n + y_{111}^n)^n$$

4. La suma $(x^n + y^n)$ es:

$$x^n + y^n = 2(n^s y_{111} h_1 k_1)^n + n(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-1}(h_1^n + y_{111}^n) + \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2}(h_1^{2n} + y_{111}^{2n}) + \binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-3}(h_1^{3n} + y_{111}^{3n}) + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^3 y_{111}^{n(n-3)}\left(h_1^{n(n-3)} + y_{111}^{n(n-3)}\right) + \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^2\left(h_1^{n(n-2)} + y_{111}^{n(n-2)}\right) + n(n^s y_{111} h_1 k_1)\left(h_1^{n(n-1)} + y_{111}^{n(n-1)}\right) + \left(h_1^{n^2} + y_{111}^{n^2}\right)$$

5. La diferencia $z^n - (x^n + y^n)$ es:

$$z^n - (x^n + y^n) = -(n^s y_{111} h_1 k_1)^n + 0 + \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2}[(h_1^n + y_{111}^n)^2 - (h_1^{2n} + y_{111}^{2n})] + \binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-3}[(h_1^n + y_{111}^n)^3 - (h_1^{3n} + y_{111}^{3n})] + \cdots \quad \ldots + \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1 k_1)^3\left[(h_1^n + y_{111}^n)^{(n-3)} - \left(h_1^{n(n-3)} + y_{111}^{n(n-3)}\right)\right] + \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^2\left[(h_1^n + y_{111}^n)^{(n-2)} - \left(h_1^{n(n-2)} + y_{111}^{n(n-2)}\right)\right] + n(n^s y_{111} h_1 k_1)\left[(h_1^n + y_{111}^n)^{(n-1)} - \left(h_1^{n(n-1)} + y_{111}^{n(n-1)}\right)\right] + \left[(h_1^n + y_{111}^n)^n - \left(h_1^{n^2} + y_{111}^{n^2}\right)\right]$$

Como $z^n - (x^n + y^n) = 0$ se deduce que:

$$(n^s y_{111} h_1)^n k_1^n - \binom{n}{2}(n^s y_{111} h_1 k_1)^{n-2}(2n^s y_{111}^n h_1^n)\, k_1^{n-2} - \left[\binom{n}{3}(n^s y_{111} h_1)^{n-3}(3h_1^{2n} y_{111}^n + 3h_1^n y_{111}^{2n})\right] k_1^{n-3} - \ldots \ldots - \binom{n}{n-3}(n^s y_{111} h_1)^3\left[(n-3)h_1^{n(n-4)} y_{111}^n + \cdots \ldots + (n-3)h_1^n y_{111}^{n(n-4)}\right] k_1^3 - \binom{n}{n-2}(n^s y_{111} h_1)^2\left[(n-2)h_1^{n(n-3)} y_{111}^n + \cdots \ldots + (n-2)h_1^n y_{111}^{n(n-3)}\right] k_1^2 - n(n^s y_{111} h_1)\left[(n-1)h_1^{n(n-2)} y_{111}^n + \cdots \ldots + (n-1)h_1^n y_{111}^{n(n-2)}\right] k_1 - \left[n h_1^{n(n-1)} y_{111}^n + \binom{n}{2} h_1^{n(n-2)} y_{111}^{2n} \ldots \ldots + \binom{n}{n-2} h_1^{2n} y_{111}^{n(n-2)} + n h_1^n y_{111}^{n(n-1)}\right] = 0$$

El resultado es una expresión susceptible de ser simplificada dividiendo por $(n y_{111} h_1)$ cada uno de sus sumandos, aunque no es imprescindible ya que lo que importa del resultado final es su estructura de polinomio en k_1 de orden *n*. De la ecuación resultante lo que interesa son las soluciones en números naturales, a condición de que los parámetros (n, y_{111}, h_1), y las soluciones de k_1, sean coprimos dos a dos y, además, $h_1^n = x - y_2$, siendo, a su vez, $y_2 = n^s y_{111} h_1 k_1$.

Sin necesidad de realizar esas simplificaciones posibles, basta con resaltar que, al ser $h_1^n = x + y_2$ e $y_2 = n^s y_{111} h_1 k_1$, en realidad, en los coeficientes de la anterior ecuación polinómica, intervienen números irracionales, ya que $h_1 = \sqrt[n]{x - n^s y_{111} h_1 k_1}$, al aparecer elevado a diferentes exponentes no divisibles por *n*, hace que todos los coeficientes sean números irracionales, salvo cuando $n = 2$.

Es precisamente el hecho de que h_1 esté elevado a distintos exponentes, primos con *n*, lo que hace que no existan soluciones en números naturales, con lo que se dispone de una nueva demostración del Último Teorema de Fermat.

---

[1] El término "*partición*" es el utilizado por T. M. Apóstol al introducir la "*Teoría Aditiva de Números*", en el capítulo 14 de su obra "*Introducción a la Teoría Analítica de Números*", (Editorial *Reverte* S.A) 1980.

[2] El que el problema planteado por Fermat no incluye el cero, para ninguna de las variables, queda bien patente al expresarlo en términos geométricos diciendo en el margen de un libro: "*Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla*". Es evidente que un cubo no puede tener un lado con longitud cero.

[3] *Dado que $z = x + y_1$ e $y = y_2 + y_1$, se deduce que $z - y = x - y_2 = h$. Ello significa que h desempeña, para y, el papel de complemento respecto z, al igual que hace y_1 para x, siendo $z = x + y_1 = y + h$.*

[4] El que la expresión $\frac{1}{n}\binom{n}{i} = \frac{(n-1)!}{(n-i)!i!} = \frac{(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}$ sea, siempre, un número natural se debe a que, siéndolo $\binom{n}{i}$ (por ser un número combinatorio), al ser *n* un número primo, los múltiplos de los factores de $i!$, necesariamente, se encuentran entre los factores que integran el numerador, después de haber efectuado la correspondiente simplificación.

[5] Conviene recordar que este tipo de partición no existe cuando $n = 2$, ya que en este caso $k = 1$.