PROBLEMAS DESCRIPTIVOS DE FRACCIONES RELACIONADAS ENTRE SI A TRAVÉS DEL COMPLEMENTO ADITIVO

María Teresa Sanz García; Bernardo Gómez Alfonso
email: m.teresa.sanz@uv.es; bernardo.gomez@uv.es
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

RESUMEN
En este trabajo se presenta un estudio sobre los problemas verbales de fracciones que ha transmitido la tradición escolar. Se trata de problemas descriptivos, porque su contexto es una historieta o narración pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica. Mediante el análisis racional e histórico epistemológico se trata de aportar claridad metodológica sobre un tipo específico de estos problemas de fracciones descriptivos, problemas donde las fracciones están relacionadas entre sí a través del complemento aditivo. Se presentan sus distintos tipos, su estructura, sus lecturas analíticas y sus métodos de resolución.

Didáctica de las matemáticas, pensamiento numérico y algebraico, resolución de problemas, problemas descriptivos de fracciones, complemento aditivo.

Introducción

Hay en los libros de textos una gran variedad de problemas verbales de fracciones, que son descriptivos, ya que en su enunciado se describe o narra una historieta o situación pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica.

Estos problemas eran una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, según fue cambiando el modelo educativo y el diseño de los libros de texto de matemáticas, fue disminuyendo la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos han desaparecido de los textos actuales, o han quedado reducidos a mero entretenimiento.

En la actualidad los problemas descriptivos en general emergen con renovado interés con las propuestas curriculares que consideran que la resolución de problemas es una competencia básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico. En este contexto adquieren particular importancia por sí mismos y como testimonio histórico del desarrollo de las ideas y métodos matemáticos.

Dado que los enunciados y el planteamiento de estos problemas ha sufrido cambios a lo largo del tiempo al adaptarse a los cambios sociales, a los desarrollos matemáticos, y a las teorías pedagógicas dominantes en cada momento de la historia de la enseñanza, parece conveniente hacer un estudio conjunto de los mismos. Este estudio debería contribuir a dar claridad y generalidad metodológica para fundamentar propuestas de enseñanza alternativas a una enseñanza cuyo enfoque pedagógico consiste en presentarlos como subproducto de otros aprendizajes, pero raramente como objeto de estudio por sí mismos.

Es por ello que se presenta aquí un estudio sobre los problemas de fracciones de varias etapas, que forma parte de los estudios sobre los problemas descriptivos aritmético-algebraicos, continuando así con los trabajos realizados con anterioridad que ya han permitido dar cuenta de los problemas de compañías, regla de tres, problemas lineales, división de fracciones, acciones simultáneas y aligación ([5], [7], [8], [9]).

Marco teórico y metodológico

Cuando se quiere indagar cómo se han configurado las matemáticas de enseñanza en diferentes momentos de la historia hay que acudir al análisis de los libros de texto del pasado como medio de instrucción, ya que solo éstos pueden aportar información sobre su planificación y puesta en práctica, al ser las únicas fuentes documentales primarias y los únicos registros disponibles.

Para ese análisis es útil servirse de las metodologías del Análisis histórico y epistemológico (ver [6]), y del Análisis didáctico (ver Rico, et. al, 2013, p. 12) propias de la Didáctica de las matemáticas. Para el análisis histórico y epistemológico, en tanto análisis de la formación de los objetos matemáticos a lo largo de su historia, se necesita de una aproximación global, ya que estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos de una misma época entre sí, es insuficiente, en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, y las particularidades propias del sistema educativo de la época. Es en este sentido en el que adquiere importancia revisar una buena selección de libros de texto representativos de las grandes etapas en que se puede dividir la historia de las ideas matemáticas objeto de estudio[i].

Para el análisis didáctico de un determinado objeto o contenido matemático se necesita delimitar unidades y subunidades de análisis que den cuenta de los aspectos conceptuales, estructurales, procedimentales, metodológicos, contextuales y representacionales. En el caso particular de que el objeto de estudio sea una determinada familia de problemas, son unidades básicas para su análisis: los tipos de problemas, sus contextos, la lectura analítica y los métodos de resolución que los autores más relevantes han dejado reflejados en sus textos históricos.

La lectura analítica

La lectura analítica es el comienzo del método cartesiano donde a las cantidades que se buscan se les asignan letras llamadas incógnitas y de ella se obtienen las ecuaciones de cuya transformación se siguen las fórmulas. Con carácter general no debe entenderse que la lectura analítica del enunciado de un problema es simplemente traducirlo al lenguaje algebraico, sino que es más bien reducirlo a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades ([15] p. 99), de modo que puede dar lugar a una ecuación o a una fórmula. La ecuación se obtiene como resultado de igualar dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad, obtenidas al describir la relación aritmética que unas cantidades representadas con expresiones algebraicas tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica (op. cit., p. 100). La fórmula se obtiene al hallar el valor de la incógnita expresada en términos generales, por lo que marca la lista operaciones que se han de efectuar con los datos. Las fórmulas, traducidas al lenguaje usual dan las reglas generales de resolución.

Los problemas descriptivos de fracciones

En la inmensa lista de problemas que ha transmitido la tradición de enseñanza hay tipo de problemas de fracciones en los que se describe una situación en la que hay una cantidad, conocida o desconocida, que se descompone en partes que están expresadas mediante fracciones.

Ejemplos primitivos de estos problemas[ii] son:

La lanza. Aquí hay una lanza, que la ½ está en el fango y 1/3 está en el agua y fuera del agua tiene 7 palmos y ¼. Pide cuanto es de largo la lanza ([16] f, 115r, p. 311-312)[iii].

Las dos piezas de tela. Un hombre compra 4 piezas de tela por 80 bezantes. Compra la primera por un precio, y otra por 2/3 del precio de la primera. Compra la tercera por ¾ del precio de la segunda. Además la cuarta, la compra por 4/5 del precio de la tercera. ¿Cuánto vale cada pieza? ([4] p. 274-275).

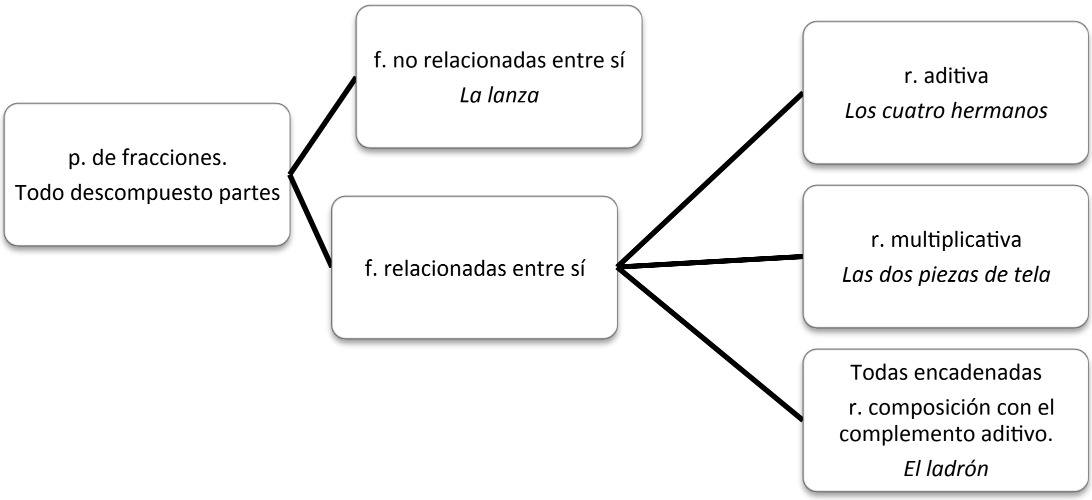
Los cuatro hermanos. Se trata de repartir una cantidad entre cuatro hermanos de modo que al segundo le corresponde $\frac{1}{3}$ más que al primero, al tercero 5 más que al segundo y al cuarto $\frac{1}{8}$ más que al tercero; la cantidad es de 18.060 pesetas; ¿cuánto corresponde a cada uno? ([2] p. 406).

El ladrón. Un ladrón entró en un palacio donde encontró una caja llena de ducados; tras cogerla, intentó escapar; pero fue cogido por un portero del palacio, al que ofreció la mitad de los ducados con tal de que le dejara escapar; pero el portero, en cierta forma compadecido, le devolvió 80 ducados de lo que el ladrón le había dado y le dejó ir. Poco después es sorprendido por otro portero del palacio al cuál le ofreció también la mitad de los ducados que le quedaban; cuando el portero recibió esta cantidad, fue también generoso y de la suma recibida devolvió al ladrón 50 ducados. Por último es cogido por un tercer portero del palacio, al cual ofrece la mitad de los ducados que llevaba en el saco, cantidad de la que el portero a su vez, le devolvió 24; al final el ladrón sale del palacio con 200 ducados en el saco. ¿Cuántos ducados había en el saco al principio? ([17] p. 263, c.7)

En estos enunciados hay un todo que se descompone en partes que vienen expresadas con fracciones (o números mixtos) y/o enteros. A primera vista los problemas presentan diferencias que tienen que ver con la forma en que se relacionan las fracciones entre sí, o con el “todo”, que es conocido o desconocido.

Concretamente, en el problema de la lanza las fracciones se yuxtaponen en una secuencia aditiva, sin ligazón entre ellas, donde el “todo” es la cantidad desconocida que se busca o demanda. En los problemas de la tela y de los hermanos, el “todo” es una cantidad conocida y lo que se pide es el valor de cada una de las partes, que vienen dadas en fracciones que se enlazan mediante una relación aditiva o multiplicativa. Por último, en el problema del ladrón, todas las partes se encadenan a través del *complemento aditivo*[iv] , una se aplica al complemento de otra que le antecede.

Como propuesta de organización de estos problemas, presentamos a continuación un esquema clasificatorio (Figura 1), que atiende a la relación entre las fracciones entre sí.



Esquema 1. Clasificación de los problemas descriptivos de fracciones

TIPOS DE PROBLEMAS

Este trabajo se centra en los problemas de fracciones relacionadas entre sí a través del complemento aditivo. Se identifica cuatro subtipos que se detallan a continuación.

Todos estos problemas tienen común un sintagma: "de lo que queda", que permite reconocerlos fácilmente. Este sintagma se refiere al complemento aditivo de una fracción, sobre la que se aplica una nueva fracción, de acuerdo con la secuencia establecida en el enunciado del problema. La reiteración del proceso genera una cadena multiplicativa de fracciones. Pueden ser de tres tipos:

1. Problemas de quitar fracciones "de lo que queda" del todo desconocido

Son problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan fracciones, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre fracciones de lo que va quedando. Se conoce el resultado de quitar esas fracciones.

a. Lectura Aritmética: Reglas antiguas.

Los tres impuestos. Es una persona que acarrea cereal a través tres pasos. En el paso exterior, le quitan una tercera parte como impuesto. En el paso intermedio, le quitan un quinto. En el paso interior le quitan una séptima parte. Supón que el cereal que le queda son 5 *dou*. Diga: ¿Cuánto cereal llevaba originalmente? Sol: 10 *dou* 9 3/8 *sheng*.

Solución: Supón que es 5 *dou*; multiplícalo por los números de los impuestos: 3, 5, 7, sucesivamente, en concepto de dividendo. Toma el producto de los restos [los numeradores de las fracciones que van quedando] 2, 4, 6, como divisor. Divide, da el número de *dou* que has hallado ([10] p. 345).

Se considera que el cereal que queda al final es $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$. En efecto el producto 3,5,7, en concepto de dividendo, y el producto 2, 4, 6, en concepto de divisor, que se menciona en la regla es $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}$, y es el resultado de reducir el producto $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$ que viene de juntar todos los pagos. Esta fracción, que reducida es 16/35, es la fracción que queda tras los gastos, que se sabe que vale 5 *dou*. Deshaciendo la fracción se obtiene que la cantidad que se pide en el enunciado del problema, que es $\frac{5}{\frac{16}{35}} = 10 + \frac{15}{16}$ *dou*

b. Lectura Aritmética: El método razonado

Una versión razonada del método anterior nos la ofrece el siguiente ejemplo:

El peregrino. Un peregrino lleva cierta cantidad de dinero. Da la mitad de su dinero (a los Brahmines) en Prayaga. Gasta dos novenos del resto en Kashi, Un cuarto de lo que le queda fue para pagar una deuda. Después gasta la 6⁄10ª partes de lo que le quedaba en Gaya. Al final regresó a casa con 63 *niskas*. Si conoces la fracción que le queda, halla la cantidad que llevaba.

Solución: Suponiendo que tenía un *niska* al empezar. Primero gastó ½, en Prayaga, y por tanto le quedó ½. En Kashi gastó, ½·2/9=1/9, y por tanto le quedó ½-1/9=7/18. La deuda que pagó =7/18·1/4=7/72, por tanto le quedaba 7/18-7/72=21/72=7/24. En Gaya gastó, 7/24·6/10=7/40. Cuando abandonó Gaya le quedaba 7/24-7/40=7/60. Por el método de [deshacer]la fracción que le queda, [resulta que]tenía 63/(7/60)=9·60=540 *niskas* ([11] p.59).

En la resolución del problema se hace la suposición de que la cantidad inicial es uno, después se calcula lo que queda tras todos los perdidas (7/60), como el valor de esta fracción es conocido, 27, ya se puede deshacer la fracción y obtener el resultado.

c. Lectura Algebraica actual

El poste. Un poste está pintado de tres colores distintos, rojo, azul y negro. La parte en negro comprende 1/3 de su longitud, la parte en rojo los 2/3 del resto y la parte azul mide 2’70 metros. Calcular la altura del poste.

Solución: Designemos por x la longitud del poste. Longitud de la parte pintada de negro x/3. Longitud de la parte pintada de rojo 4x/9. Longitud de la parte pintada de azul 2.7ms. Podremos escribir la ecuación de primer grado, x/3+4x/9+2.7=x, de lo que operando se obtiene x=12.15ms ([1] pgs. 68 y 69).

De acuerdo con el método cartesiano la lectura algebraica comienza asignando x al todo desconocido (altura total del poste), para así poder trabajar con ella como si fuera una cantidad conocida. Tras esto se escriben las relaciones aritméticas (partes de lo que va quedando) entre las cantidades (partes fraccionadas) conocidas y el todo (x). Por último se plantea la ecuación (la suma de todas las partes dan lugar al todo, es decir, se igualan dos expresiones algebraicas que dan la misma cantidad). Tras esto se resuelve la ecuación obteniendo así el valor del todo, *x*.

Generalización

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que queda, y queda una cantidad A: ¿qué cantidad total se tenía?

Resolución. Se van a ir quitando partes según el enunciado, estas partes vendrán representadas por fracciones, $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$.

(1)	$\frac{p_1}{q_1}T$	Hacer una parte del todo
(2)	$\left(T - \frac{p_1}{q_1}T\right) = T(1 - \frac{p_1}{q_1})$	Lo que queda al quitar esa parte
Reiteración		
(3)	$\frac{p_2}{q_2} \cdot T(1 - \frac{p_1}{q_1})$	Hacer una nueva parte con lo que queda
(4)	$T\left(1 - \frac{p_1}{q_1}\right) - \frac{p_2}{q_2} \cdot T\left(1 - \frac{p_1}{q_1}\right) = T(1 - \frac{p_1}{q_1})(1 - \frac{p_2}{q_2})$	Lo que queda al quitar la nueva parte
(5)	$T(1 - \frac{p_1}{q_1})(1 - \frac{p_2}{q_2}) = A$	Igualando las dos maneras de expresar lo que queda (plateo de la ecuación)
(6)	$T = \frac{A}{(1 - \frac{p_1}{q_1})(1 - \frac{p_2}{q_2})}$	De (5) se obtiene la fórmula

2. Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido.

En estos problemas las fracciones vienen dadas en números mixtos: una parte entera y una misma parte fraccionaria menor que la unidad.

a. Lectura Aritmética: el método razonado.

La huevera. Un hombre regresa a Paris de un paseo por el campo. Visita a tres amigos enfermos y le da al primero la mitad de sus huevos, más la mitad de un huevo, al segundo, la mitad de lo que le queda más medio huevo, al tercero, la mitad de los que aún le queda y más medio huevo, después de esto no le queda ninguno. ¿Cuántos llevaba.

Solución: Antes de su tercera visita no le queda más que un huevo, porque 1 es el único que al dar la mitad más ½ no queda nada. Si durante la segunda visita no hubiera dado más que la mitad de sus huevos, habría conservado la mitad, que sería el 1 huevo que tenía para su tercera visita, más medio huevo que no habría dado. Luego, antes de la segunda visita tenía 2 veces 1 ½ huevos, o 3 huevos. Igualmente, si en la primera visita hubiera guardado el ½ huevo, le hubieran quedado 3 ½ , que habrían sido la mitad de los huevos. Tenía, pues 7 huevos ([18] p. 72 y 73).

Vinot utiliza el método inverso. Dado que tras el último reparto no le queda nada razona que el único número al cual dar la mitad más ½ no queda nada es el 1.

b. Lectura algebraica.

Otra huevera. Una huevera vende todos los huevos, vendiendo en cada uno de 4 ventas sucesivas a mitad de los que tenía más medio huevo. ¿Cuántos vendió?

Solución: 1º. Venta $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ y le quedan $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

2º. Venta $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ y le quedan $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$

3º. Venta $\frac{x}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$ y le quedan $\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$

4º. Venta $\frac{x}{16}-\frac{7}{16}+\frac{1}{2}=\frac{x}{16}+\frac{1}{16}$ y le quedan $\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{8}\right)-\left(\frac{x}{16}+\frac{1}{16}\right)=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$ que han de ser cero. Luego x=15. ([13] p. 162).

El autor usa el método cartesiano. Asigna la letra x a la cantidad desconocida, para suponerla conocida, aplicarle las condiciones del problema y plantear la ecuación al igualar las dos expresiones que expresan las mismas cantidades.

Generalización

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida y una fracción $\frac{a_1}{b_1}$: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que queda y una fracción $\frac{a_2}{b_2}$, y queda una cantidad A: ¿qué cantidad total se tenía?

Resolución. Se van a ir quitando partes según el enunciado, estas partes vendrán representadas por fracciones, $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$.

	$\frac{p_1}{q_1}T+\frac{a_1}{b_1}$	Hacer una parte del todo
(1)	$\left(T-\left(\frac{p_1}{q_1}T+\frac{a_1}{b_1}\right)\right)=T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}$	Lo que queda al quitar esa parte
Reiteración		
(2)	$\frac{p_2}{q_2}\cdot\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)+\frac{a_2}{b_2}$	Hacer una nueva parte con lo que queda

(3)	$\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)-\left(\frac{p_2}{q_2}\cdot\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)+\frac{a_2}{b_2}\right)$ $=T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}$	Lo que queda al quitar la nueva parte
(4)	$T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}=A$	Igualando las dos maneras de expresar lo que queda (plateo de la ecuación)
(5)	$T=\frac{A}{\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}}$	De (5) se obtiene la fórmula

3. Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido.

Son problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan partes, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre se repone una parte, igual o diferente, de lo que se ha quitado, y no siempre de la misma naturaleza.

a. Lectura Aritmética: el método razonado

El ladrón. Un ladrón entró en un palacio donde encontró una caja llena de ducados; tras cogerla, intentó escapar; pero fue cogido por un portero del palacio, al que ofreció la mitad de los ducados con tal de que le dejara escapar; pero el portero, en cierta forma compadecido, le devolvió 80 ducados de lo que el ladrón le había dado y le dejó ir. Poco después es sorprendido por otro portero del palacio al cuál le ofreció también la mitad de los ducados que le quedaban; cuando el portero recibió esta cantidad, fue también generoso y de la suma recibida devolvió al ladrón 50 ducados. Por último es cogido por un tercer portero del palacio, al cual ofrece la mitad de los ducados que llevaba en el saco, cantidad de la que el portero a su vez, le devolvió 24; al final el ladrón sale del palacio con 200 ducados en el saco. ¿Cuántos ducados había en el saco al principio?

Solución: De los 200 ducados que hay al final se restan 24, que le devolvió el tercer portero; el resto es 176; esto se multiplica por 2 y tenemos 352; de aquí se restan los 50 que le devolvió el segundo portero y quedan 302; esto se multiplica por 2 y tenemos 604; de aquí se quitan los 80 que le devolvió el primer portero y el resto es 524; esto se multiplica por 2 y tenemos 1048, que es el número de ducados iniciales ([17] p. 263, c.7)

El autor utiliza el método inverso. El siguiente esquema ilustra el proceso paso. Obsérvese que, aunque se usa la letra x para denominar la incógnita, no se trata de una lectura cartesiana, ya que no se opera con la incógnita.

Fracción que paga	Lo que queda

1ª $\frac{1}{2}$x 2ª $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+80)$ 3ª $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50\right]$	$\frac{1}{2}x+80$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50$ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50\right]+24$
Como, por el enunciado, $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50\right]+24=200$, para obtener el resultado basta invertir el proceso: $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50\right]+24=200 \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+80\right)+50=2\cdot(200-24) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \frac{1}{2}x+80=2\cdot(2\cdot(200-24)-50) \leftrightarrow x=2\cdot(2\cdot(2\cdot(200-24)-50)-80)$=1048	

b. Lectura Algebraica.

El jugador. Un jugador pierde la mitad de su dinero, y luego gana 6 ch.: después pierde un tercio de lo que le queda, y luego gana 12 ch.; finalmente pierde un cuarto de lo que le queda, y halla que le quedan dos guineas: ¿qué suma tenía al principio?

Solución: Las unidades, con que el jugador gana y pierde están en chelines, de las que le quedaron 42. Expresemos con x el número de chelines que tenía al principio, y simbolizamos las condiciones que se presentan en el problema.

Su primera pérdida es $\frac{x}{2}$, le quedan $x-\frac{x}{2}$, o $\frac{x}{2}$, tras lo cual gana 6 ch., que suma a $\frac{x}{2}$, lo que da $\frac{x}{2}+60$, que es el dinero que posee al final de su primera aventura; a continuación pierde un tercio de $\frac{x}{2}+6$, que es $\frac{x}{6}+2$, y que restado de $\frac{x}{2}+6$, deja $\frac{x}{2}+6-\frac{x}{6}-2$, o $\frac{x}{3}+4$, después de esto gana 12 ch. que suma a $\frac{x}{3}+4$, hacen $\frac{x}{3}+4+12$, o $\frac{x}{3}+16$, que es el dinero que posee al final de su segunda aventura, ahora pierde un cuarto de $\frac{x}{3}+16$, o $\frac{x}{12}+4$, que resta de $\frac{x}{3}+16$, deja $\frac{x}{3}+16-\frac{x}{1}-4$, o $\frac{x}{4}+12$ lo que por las condiciones del problema es igual a 42, consecuentemente: $\frac{x}{4}+12=42, \frac{x}{4}=30, x=120$, que es la cantidad que tenía al principio ([12] p. 252).

Peacock, aplica el método cartesiano. Asigna la letra x a la cantidad desconocida, para suponerla conocida y poder aplicarle las condiciones del problema, en este quitar una parte al todo inicial y reponer una cierta cantidad tantas veces como indica el enunciado. Finalmente, se plantea la ecuación, al igualar las dos expresiones que expresan las mismas cantidades.

Generalización

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida, y luego se repone una cantidad $\frac{r_1}{t_1}$.: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que le queda, y luego se repone una cantidad $\frac{r_2}{t_2}$.; y queda una cantidad A: ¿qué cantidad total se tenía?

Resolución. Notar que las partes se denominan por $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$. En el caso de la reposición, $\frac{r_i}{t_i}$, dónde *i* indica cada añadido y $t_i \neq 0$. Notar que estas partes pueden ser enteras o no serlo y además pueden ser de la misma magnitud del elemento que se va eliminando, pero puede no serlo.

(1)	$\frac{p_1}{q_1}T$	Hacer una parte
(2)	$\left(T - \frac{p_1}{q_1}T\right)$	Lo que queda
(3)	$(T - \frac{p_1}{q_1}T) \pm \frac{r_1}{t_1}$	Reponer
Reiteración		
(4)	$\frac{p_2}{q_2} \cdot \left(\left(T - \frac{p_1}{q_1}T\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right)$	Hacer una segunda parte
(5)	$(T - \frac{p_1}{q_1}T) \pm \frac{r_1}{t_1} - \frac{p_2}{q_2} \cdot \left(\left(T - \frac{p_1}{q_1}T\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right)$	Lo que queda
(6)	$\left[T \cdot \left(1 - \frac{p_1}{q_1}\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right] \cdot \left[1 - \frac{p_2}{q_2}\right] \pm \frac{r_2}{t_2}$	Reponer
(7)	$\left[T \cdot \left(1 - \frac{p_1}{q_1}\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right] \cdot \left[1 - \frac{p_2}{q_2}\right] \pm \frac{r_2}{t_2} = A$	Igualando (6) a la cantidad que queda A, se obtiene la ecuación
(8)	$T = \frac{\frac{A \mp \frac{r_2}{t_2}}{1 - \frac{p_2}{q_2}} \mp \frac{r_1}{t_1}}{1 - \frac{p_1}{q_1}}$	De (7) se obtiene la fórmula

4. Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido.

Se trata de una variante de los anteriores, pero al ser el reparto equitativo no es necesario conocer la cantidad que queda tras todo el reparto. El proceso de resolución es muy diferente.

a. Lectura Aritmética: regla antigua

El legado en bezantes. Un hombre en sus últimos días decide hacer testamento entre sus hijos mayores de la forma siguiente. Al primero le dijo, te daré un bezante y un séptimo del resto, a otro le dijo, te daré 2 bezantes y un séptimo del resto, a un tercero le dijo, te daré 3 bezantes y un séptimo del resto, y así sucesivamente con todos sus hijos. Uno de los hijos dijo que el reparto no era justo. Pero el padre dijo que todos tenían el mismo dinero

Solución: Por los séptimos que él da a cada hijo tienes 7 y le quitas 1, entonces el resto son 6 y estos son el número de hijos que multiplicados por si mismos da 36 que es el número total de bezantes ([4] p.399).

Análogo problema que nos permite entender la regla utilizada por Fibonacci es el que se enuncia a continuación:

El legado en ducados. Un mercader estando enfermo hizo testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda, ordenando que al hijo primero le diesen la sexta parte de su hacienda, y 300 ducados más; al segundo la sexta parte del restante, y 600 ducados más; y al tercero la sexta parte del restante y 900 ducados más, y con este orden en los demás, dando siempre a cada uno la sexta parte del restante, y 300 ducados más al uno que al otro. Muerto el padre, partieron la hacienda, y hallaron que tanto vino al uno como al otro: pídese cuántos hijos dejó el padre, cuánta hacienda, y cuanto vino por cada uno

Solución: Quita el numerador del quebrado del denominador; esto es, 1 de 6 y quedaran 5 y tantos hijos dejó, luego multiplica los 300 ducados, que se dan de más a cada hijo, por 6, denominador del quebrado y montaran 1800 ducados y tantos ducados le tocaron a cada uno, los cuales multiplicados por los 5 hijos montaran 9000 ducados y tanta hacienda dejó el padre; pruébalo y hallarás ser verdad ([14] p. 209).

Una posible explicación de la regla puede ser que tras hacer el último reparto lo que queda es 0. Con esto, llamamos *A* a la cantidad que queda antes de darle al último hijo su parte. Así pues, el n-ésimo hijo recibiría:

Fibonnacci	Puig
n·1 bezantes +1/7 A	n·300 ducados+1/6 A

Y por tanto al calcular lo que queda al final (sabemos que es o) se obtiene

Fibonnacci	Puig
A - n·1 +1/7 A =0 $\underline{7\cdot A\text{-}A}\text{-}\mathit{7}\cdot n=0$	A - n·300+1/6 A=0 $\underline{6\cdot A\text{-}A}\text{-}\mathit{1800}\cdot n=0$

De la expresión subrayada es de dónde se obtiene el número de hijos y la cursiva la cantidad que le tocaría a cada uno de ellos.

b. Lectura Algebraica

El legado en libras. Un padre deja a su muerte varios hijos, quienes comparten sus bienes de la siguiente manera: el primero recibirá 100 libras y la décima parte del resto, el segundo recibirá 200 libras y la décima parte del resto, el tercero 300 libras y la décima parte del resto, el cuarto recibirá 400 libras y la décima parte del resto, así sucesivamente. Así se obtiene que la herencia queda dividida equitativamente entre sus hijos. Se requiere saber, cuánto hijos eran y cuánto recibió cada uno.

Solución. Supondremos que el total de la fortuna sea *z* libras; y que cada hijo recibirá la misma parte a la cual la llamamos *x*, con lo cual el número de niños vendrá determinado por $\frac{z}{x}$. Ahora pasamos a la resolución del problema.

Suma o herencia que es dividida	Orden de los hijos	Parte de cada hijo	Diferencias
z	1º	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
z-x	2º	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-2x	3º	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-3x	4º	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-4x	5º	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-5x	6º	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	y así sucesivamente…

Hemos insertado en la última columna las diferencias, las cuales se han obtenido cada parte menos la anterior, dado que todas las partes son iguales esta diferencia es igual a 0. Con lo que resolviendo esta ecuación $100 - \frac{x-100}{10} = 0$ se obtiene que x=900.

Así pues ahora sabemos que cada hijo recibirá 900 libras, cogiendo cualquiera de las fórmulas de la tercera columna obtenemos $x = 100 + \frac{z-100}{10}$ que z=8100 libras, y en consecuencia, el número de hijos 8100/900=9. ([3] p. 202)

Análogo problema pero con una explicación más actual:

El legado en duros. Un padre dispuso en su testamento que del capital que dejaba se diesen al mayor de sus hijos 1000 duros y la décima parte del resto, que al segundo le dieran 2000 duros y la décima parte del resto, al tercero 3000 duros y la décima parte del resto, y así sucesivamente. Hecha la distribución se vió que todos los hijos se llevaron lo mismo, ¿Cuánto era la herencia total y cuanto recibió cada uno?

Solución: Llamando x al total de la herencia, al hijo mayor le corresponden

$$1000+\frac{x-1000}{10}=\frac{9000+x}{10}$$

Y por consiguiente el resto de la herencia será
$x-\frac{9000+x}{10}=\frac{9x-9000}{10}$.

Entregando de esto 2000 duros al hijo segundo, quedará $\frac{9x-29000}{10}$ luego al segundo le pertenecen, $2000+\frac{9x-29000}{100}=\frac{171000+9x}{100}$ y como todos los hijos se llevaron la misma cantidad, tendremos $\frac{9000+x}{10}=\frac{171000+9x}{100}$ de donde se deduce que x=81000duros. Conocida la herencia fácilmente se averigua lo que corresponde a cada uno de los hijos y el número de estos. (*Vallín, 1895, p. 308).*

Se puede observar que, tanto en el problema de las libras como en el de los duros, aunque los autores utilizan el método cartesiano sus lecturas analíticas no son las mismas. En el caso del legado en duros directamente se iguala la parte que le corresponde al primer hijo con la que le corresponde al segundo hijo; mientras que en el caso del legado en libras, se plantea que la diferencia de lo que les corresponde a cada dos hijos es cero.

Generalización

Enunciado. Una cantidad T desconocida se debe repartir entre un número de personas n. Cada persona recibe: a_1 unidad más $\frac{p_1}{q_1}$ de las restantes, la 2ª a_2 unidades más $\frac{p_2}{q_2}$ de las restantes, la 3ª a_3 unidades más $\frac{p_3}{q_3}$ de las restantes, y así sucesivamente todas las demás personas. El reparto es equitativo. ¿Cuántas personas y qué cantidad hay?

Resolución. Se eliminan partes enteras de la misma naturaleza/magnitud que el todo T, a estas partes se les denomina a_i, siendo *i* cada una de los eliminaciones.

(1)	$T-a_1$	Se quita una cantidad
(2)	$\frac{p_1}{q_1}(T-a_1)$	Se hace una parte de lo que queda
(3)	$a_1+\frac{p_1}{q_1}(T-a_1)$	Lo que se le entrega al primero
(4)	$T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}(T-a_1)\right)$	Lo que queda
Reiteración		

(5)	$T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2$	Se quita una cantidad
(6)	$\frac{p_2}{q_2}\cdot\left[T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2\right]$	Se hace una segunda parte de lo que queda
(7)	$a_2+\frac{p_2}{q_2}\cdot\left[T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2\right]$	Lo que se le entrega al segundo
(8)	$a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)=$ $a_2+\frac{p_2}{q_2}\cdot\left[T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2\right]$	La condición del problema nos lleva a la ecuación, (4)=(7).
(9)	$T=\dfrac{a_1\left(-1+\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_1}{q_1}\right)+a_2\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)}{\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_1}{q_1}}$	De (8) se obtiene la fórmula

Conclusión

En este trabajo se ha presentado un esquema clasificatorio sobre los problemas descriptivos de fracciones. Se centra el estudio en los problemas dónde las fracciones están relacionadas entre sí a través del complemento aditivo.

Dentro de este tipo de problemas se han encontrado cuatro subtipos claramente diferenciados: Problemas de quitar fracciones “de lo que queda” del todo desconocido, Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido, Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido y Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido.

Esta clasificación ha sido posible gracias a un estudio y recopilación de problemas de fracciones extraídos de libros de diferentes periodos históricos. Se han agrupado en categorías atendiendo a sus lecturas aritméticas y algebraicas, notar que se ha intentado extraer todos los enfoques metodológicos. También se han generalizado en forma de enunciado genérico, y en base a él se descrito su estructura, dando lugar a fórmulas que permiten la resolución de cada tipo de problema.

Podemos afirmar que los problemas que predominan en los libros de textos actuales son los *Problemas de quitar fracciones “de lo que queda” del todo desconocido* en los que se observan una gran variedad de lecturas analíticas a la vez que múltiples variantes. Sin embargo los otros dos tipos se encuentran en textos antiguos.

El reto que se plantea con este trabajo es a partir de esta información diseñar una propuesta de enseñanza para este tipo de problemas. El reto como educadores es orientar la enseñanza para que los estudiantes sepan efectuar el análisis de las relaciones entre cantidades que determinan las condiciones de los enunciados, y elegir cuáles de las lecturas analíticas son las más apropiadas en cada caso para resolverlos.

Bibliografía

[1] Álvarez, E (1936) Problemas elementales de Matemáticas, Física y Química. Ed. Jus Lamper (Publicaciones de Editorial Instituto Samper). Madrid.

[2] Ascarza, V. (1935). Tratado de Aritmética. Madrid: El magisterio Español (3ª ed.)..

[3] Euler, L. (1770/1822). Elements of Algebra. Translated from the French by John Hewlett. London: Longman (3ª ed.).

[4] Fibonacci, L. (1202/2002). Liber Abacci. En Laurence Sigler, L. Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Springer. 2002.

[5] Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de “compañías”. Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. 2, 3, 19-29.

[6] Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. ortega, L. Rico y A. Vllecillos (eds.). Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la SEIEM, 79-85. Granada. U. de Granada.

[7] Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luís Rico (Eds.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática, pp. 47-69. Córdoba. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba

[8] Gómez B. (2007). Problems of a linear kind: from Vallejo to Peacock. In Demetra Pitta – Pantazi $ George Philippou (Edts.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 5. Research Report. Working Group 6, pp. 882-891. Larnaca, Cyprus. ERME (European Society for Research in Mathematics Education). Department of Education. University of Cyprus.

[9] Gómez, B. (2014). Los problemas de acciones simultáneas. En Bernardo Gómez y Luis Puig (Eds.). Resolver problemas. Estudios en Memoria de Fernando Cerdán (pp. 65-102) Departament de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valéncia. Servei de Publicacions de la Universitat de València.

[10] Jiuzhang Suanshu [The nine Chapters on the Mathematical Art] (100/1999). Traducido al inglés en Shen, Kangshen; Crossley, John N.; Lun, Anthony W. C. The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary. Oxford: Oxford University Press. 1999 (contiene dos comentarios: uno de Liu Hui del s. III y otro del s. VII).

[11] Lilavati (1150/2006). Lilavati Of Bhaskaracarya Treatise of Mathematics of Vedic Tradition. En Patwardhan, K. S., Naimpally, S. A. y Singh, Dehli: Motilal Banarsldass Publisher Private Limited. 2ª ed. (1ª ed. 2001).

[12] Peacock, G. (1842). Treatise on Algebra, vol.1. Cambridge: University press.

[13] Pérez de Moya, J. (1562/1998). Arithmetica práctica y speculativa. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid. Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

[14] Puig, A. (1715/2001). Arithmetica especulativa y practica y Arte de Algebra. 4ª ed. Barcelona. Por joseph Giralt. Impresor, y Librero (Facsímil, 2001. Valladolid: Maxtor).

[15] Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). Investigación en Educación Matemática. Actas del VII Simposio de la SEIEM, pp. 97-108. Granada: SEIEM y Universidad de Granada: Granada.

[16] Santcliment, F. (1482/1998): Summa de l'art d'aritmètica. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Viv: Eumo Editorial.

[17] Silíceo, J. M. (1513/1996). Ars Arithmética. En J. M. Cobos Bueno, J.M. y E. Sánchez Salor (Eds. 1996) Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética. Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

[18] Vinot, J. (1860) Récréations mathématiques. Paris: Larousse et Boyer.

---

[1] A saber: el periodo antiguo, el anterior a la imprenta, el de las aritméticas comerciales, el de los grandes libros de autor anteriores al sistema escolar, el de los comienzos del libro escolar, y el de la enseñanza graduada en sus diversos planes de estudio.

[2] Se incorpora al enunciado de estos problemas un título o encabezamiento con el fin de poder referirnos a ellos a lo largo del documento.

[3] El mismo problema con los mismos datos se encuentra en [4] p. 454).

[4] Se llama complemento aditivo de un quebrado propio, lo que le falta para valer la unidad ([2] p. 178)