

Una discreta manera de introducir las Ecuaciones en Diferencias en Educación Secundaria Obligatoria

Elena García Rodríguez; M^a Victoria Otero Espinar; Dolores Rodríguez Vivero

email: garciarodrigueze@gmail.com; mvictoria.otero@usc.es;
dolores.rodriguez.vivero@usc.es

Universidad de Santiago de Compostela

RESUMEN

En este estudio pretendemos poner de manifiesto la utilidad de las matemáticas para otras ciencias tales como la biología y ciencias de la salud, mediante el uso de las ecuaciones en diferencias. Se propone un acercamiento a las sucesiones y progresiones, curricularmente correspondiente al tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria, de un modo diferente al usual. Se introducirán las ecuaciones en diferencias aplicándolas en fenómenos tales como el crecimiento de poblaciones de seres vivos, propagación de enfermedades y en otras situaciones que son cercanas al escolar.

Por último, se llevará a cabo un proyecto de investigación en el que tendrán que modelizar determinadas situaciones utilizando ecuaciones en diferencias y haciendo uso de la calculadora. Con ello se pretende motivar al alumnado, consolidar los conocimientos ya adquiridos por ellos, fomentar su creatividad y que los alumnos se percaten de la funcionalidad de las matemáticas.

Palabras clave: *Sucesión, Progresión Aritmética, Progresión Geométrica, Ecuaciones en Diferencias, Modelos Matemáticos en Biología, Calculadora.*

1. Justificación del trabajo

1.1. Introducción

La comprensión de la naturaleza y sus fenómenos necesita del auxilio de las matemáticas; así, una gran cantidad de procesos de todo tipo: físicos, biológicos, económicos, químicos... se modelizan matemáticamente por medio de ecuaciones en diferencias. Asimismo, las ecuaciones en diferencias también se han utilizado clásicamente para obtener aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

La modelación matemática ofrece una herramienta de investigación que permite estudiar la esencia de un fenómeno y dejar de lado detalles que no son relevantes para su comprensión. También, en ocasiones, permite complementar o, incluso, sustituir experimentos de laboratorio y simularlos con ordenadores o calculadoras.

Por otra parte, no sólo las matemáticas sirven como herramienta para otras ciencias sino que también ocurre al contrario. Así, por ejemplo, la biología presenta problemas muy interesantes al matemático, propiciando el desarrollo de nuevos métodos y la aplicación de técnicas matemáticas. Como ejemplos del enriquecimiento de la matemática a partir de problemas biológicos podemos mencionar la teoría de las redes de neuronas artificiales y la técnica de optimización llamada algoritmos genéticos, que ya se han ganado su lugar en el campo de la matemática sin olvidar sus orígenes biológicos, véase [17].

Actualmente, ya nadie pone en duda el gran interés que tienen los métodos matemáticos por su aplicación a otros campos del saber, no sólo a nivel científico, sino en el ámbito cotidiano. Pero la relación entre las matemáticas y las ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad. Como recurso didáctico se puede utilizar tal reciprocidad de manera amena, en cualquiera de sus formas para enriquecer la enseñanza, la praxis y formación del docente de matemáticas, véase [15].

En este trabajo intentaremos que los escolares aprendan ciertos contenidos matemáticos tales como los conceptos de sucesión, progresión aritmética y geométrica, así como interpretar gráficas de sucesiones y tener una idea intuitiva del concepto de límite, todo ello basado en la utilización de la modelización matemática de situaciones biológicas y médicas en las que serán necesarias las ecuaciones en diferencias. De esta manera, los estudiantes verán la importancia de la modelización matemática para resolver numerosos problemas que surgen en la vida real, y más en concreto, en la biología y en ciencias de la salud. Pretendemos de este modo que los escolares logren un aprendizaje significativo.

En esta investigación relacionaremos la actividad matemática escolar con ciertas situaciones reales, con el fin de motivar al alumnado tanto hacia las matemáticas como en su capacidad futura para utilizar estas herramientas en distintos problemas que surgen en la vida cotidiana o profesional.

El foco principal de este trabajo consiste en introducir las ecuaciones en diferencias en el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria comenzando con los conceptos de progresiones geométricas y aritméticas, contenidos propios del currículo oficial para dicho curso escolar, como se puede comprobar en [4]. Al mismo tiempo, se fomentará la interdisciplinariedad mediante el uso de este tipo de ecuaciones en procesos biológicos que le son familiares al estudiante y además, se motivará al alumnado hacia una correcta utilización de las calculadoras para centrar el trabajo del escolar en el razonamiento y evitar tareas repetitivas que la máquina puede realizar. En suma, los estudiantes comprenderán de forma significativa el concepto de modelo discreto que tantas veces se encuentra en problemas cotidianos.

En primer lugar, se han elaborado una serie de actividades de desarrollo con el fin de que los escolares vean la importancia de las matemáticas y más en concreto, de las ecuaciones en diferencias, para resolver numerosos problemas no sólo matemáticos sino también aplicados a

otras ciencias como la biología. Estas actividades están inmersas en la unidad didáctica de sucesiones y progresiones correspondiente al tercer curso de ESO.

Partiremos de las concepciones espontáneas personales que poseen los estudiantes ya sean adquiridas en el colegio o a través de los medios de comunicación o de situaciones familiares. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Pretendemos que los errores y dificultades detectadas en este estudio nos permitan determinar los obstáculos relacionados con los conceptos de progresión aritmética y geométrica y proponer alternativas para solucionarlos.

Una vez finalizadas las actividades de aplicación, se llevará a cabo un proyecto de investigación, mediante el cual se pretende que los estudiantes adquieran una actitud autónoma y se sientan motivados al aplicar los conocimientos adquiridos en un proyecto que trata situaciones médicas de actualidad.

1.2. Objetivos de la investigación

El objetivo general que se pretende con esta investigación es que los estudiantes aprendan de forma significativa el concepto de ecuación en diferencias y se den cuenta de lo necesarias que son las matemáticas, en concreto dichas ecuaciones, para modelizar situaciones en las ciencias biológicas y de la salud.

Los objetivos específicos que deberán lograr los estudiantes al finalizar esta propuesta son los que se citan a continuación:

- Comprender los conceptos de variable discreta, sucesión, recurrencia, ecuación en diferencias, progresión aritmética y geométrica y ecuación logística.
- Relacionar las matemáticas con la biología y las ciencias de la salud fomentando de esta manera la interdisciplinariedad.
- Expresar de forma gráfica (mediante el uso de una calculadora gráfica), verbal y algebraica el concepto de ecuación en diferencias y, en particular, el de sucesión, progresión aritmética y geométrica y ecuación logística.
- Interpretar correctamente las gráficas de sucesiones y asociarlas con enunciados reales.
- Distinguir los diferentes tipos de progresiones mediante un enunciado o una gráfica.
- Entender la idea intuitiva del concepto de límite de una sucesión haciendo uso de la calculadora gráfica.
- Potenciar la comunicación lingüística, la expresión oral y escrita, el desarrollo procedimental a la hora de tratar y elaborar la información (gráficos, tablas, etc.) así como la utilización de la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC), la sensibilidad artística y cultural, el trabajo en equipo, etc., es decir, el desarrollo de las diferentes competencias básicas.
- Fomentar la creatividad, la imaginación, la autoestima de cada estudiante y la colaboración y el respeto hacia los demás.
- Desarrollar la capacidad de abstracción matemática.
- Percibir la importancia de la utilización de determinadas herramientas matemáticas para su futura vida académica y/o profesional.

Como objetivo final que pretendemos alcanzar con este estudio es consolidar los conocimientos adquiridos sobre las ecuaciones en diferencias y fomentar el espíritu emprendedor e investigador de cada estudiante.

2. Fundamentación teórica

A continuación, se describen los principales aspectos teóricos que han servido de guía para la realización de este estudio. En primer lugar, veremos la evolución a través del tiempo de las principales ecuaciones en diferencias. Por último, analizaremos los contenidos sobre progresiones en el currículo de 3º ESO y los estudios previos que guiaron esta investigación.

2.1. Un poco de historia

La utilidad y concepción de las teorías matemáticas y sus saberes se utilizaban en otras ciencias existentes en cada época, tales como la astronomía y la música, por ejemplo. Los resultados matemáticos obtenidos son útiles para el estudio en diversos ámbitos. Sin la matemática, el ser humano no hubiera alcanzado los niveles de desarrollo necesarios, tal y como se puede leer en [15].

Cabe mencionar en este apartado al matemático italiano del siglo XIII Fibonacci, que fue el primero en describir la sucesión que lleva su nombre y que tantas aplicaciones tiene hoy en día en muchos aspectos relacionados con la naturaleza.

En el siglo XVII, distintos matemáticos propusieron los primeros intentos de modelos matemáticos aplicados a otras ciencias, como por ejemplo, Descartes, quien los aplicó a la fisiología, pero éstos eran poco rigurosos y contenían un gran número de errores.

En el siglo XVIII tiene lugar el famoso modelo de Malthus que predecía la ocurrencia en el futuro de un fenómeno llamado *castástrofe malthusiana* en el que los recursos alimentarios serían claramente insostenibles para mantener a la población mundial y sobrevendrían graves guerras y hambrunas que causarían gran cantidad de muertos. Las ideas de Malthus se recogieron en forma de ecuaciones diferenciales y con ellas se podía calcular, en función de ciertos parámetros, el tiempo de ocurrencia de dicha catástrofe, donde la cantidad de alimentos disponibles no es suficiente para sostener a toda la población.

Este modelo fue tomado seriamente por muchas personas pero el pronóstico catastrofista no se cumplió por varias razones: en primer lugar ocurrió la llamada transición demográfica por la cual muchas sociedades a partir de un nivel de renta moderaron la tasa de natalidad, pasando de un crecimiento exponencial a un crecimiento logístico; por otra parte, la tasa de aumento de los recursos había crecido más rápido de lo previsto.

Ante esta situación, surgió el modelo de Verhulst en 1838 para describir la evolución de una población cuyo crecimiento es exponencial al principio (como en el caso del modelo de Malthus), pero que al cabo de un tiempo aparece la competición entre los miembros de la población por los recursos existentes, frenando el crecimiento y alcanzando una cota en el número de efectivos.

En 1825 Benjamin Gompertz propuso un modelo para describir la mortalidad humana en edades adultas y es usado actualmente por muchas compañías de seguros para el cálculo de los costes de los seguros de vida. También describe con bastante buena aproximación el crecimiento de los tumores, que representa un problema de desarrollo de una población en un espacio confinado.

En el siglo XX, Michaelis y Menten proponen un modelo bioquímico para describir la catálisis enzimática. Dos años después, Lee presenta un modelo para explicar los efectos de las radiaciones sobre las células.

El siguiente modelo de interés en biología fue desarrollado por Ludwig von Bertalanffy a principios de la segunda mitad del siglo XX para describir el tamaño de los individuos de una población de peces en función de su edad. En general, describe bastante bien la evolución de la talla de una población con la edad (a partir de lo cual se puede describir también la evolución de la masa corporal con la edad), de modo que el crecimiento es rápido al principio y posteriormente va disminuyendo hasta que para tiempos suficientemente grandes, es nulo.

Otros ejemplos interesantes que tuvieron lugar durante este siglo fueron, el modelo de Lee para explicar los efectos de las radiaciones sobre las células y el modelo de Hodgkin y Huxley para la generación y transmisión del impulso nervioso. Éste último tuvo mucha trascendencia ya que a través de él es posible explicar todas las propiedades experimentales conocidas respecto a la generación y propagación del impulso nervioso y, además, sugería que la dinámica de muchos procesos biológicos debía ser no lineal.

A partir de este momento, empieza la edad de oro para la construcción y posterior interpretación de modelos matemáticos aplicados a la biología. En los años 60 se publicaron un gran número de trabajos, especialmente los relacionados con el sistema nervioso, muchos de ellos con escaso interés práctico. El siguiente paso importante se da en la década de los 70 cuando se descubre que las soluciones de sistemas dinámicos presentaban un comportamiento caótico. Un ejemplo lo encontramos en el modelo logístico de Robert May, que supuso toda una revolución comparable al impacto causado por el modelo de Hodgkin y Huxley. La teoría del caos inmediatamente entusiasmó a biólogos, físicos y matemáticos, dedicados todos ellos al estudio de los modelos matemáticos.

A pesar de que las situaciones reales de dinámica de poblaciones, actividad cerebral o evolución de enfermedades, entre otras, son muy complicadas de modelizar a través de modelos elementales, se pueden realizar simplificaciones para poder estudiar el comportamiento parcial del sistema.

2.2. Las progresiones en el currículo de 3ºESO

Dado que en este curso escolar 2014/2015 aún no se ha implantado la LOMCE en el currículo de 3º ESO, vamos a guiarnos por la Ley de Educación todavía vigente, LOE, [7]. En este apartado analizaremos los contenidos relativos a sucesiones y progresiones que aparecen en el Decreto 133/2007 del 5 de julio por el que se regulan las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad Autónoma de Galicia, [4].

Las sucesiones y progresiones se encuentran en el currículo del tercer curso de la ESO dentro del bloque de Álgebra. Los contenidos que se deberán trabajar en este curso y que los estudiantes deberán manejar con soltura son:

- Identificación y comprobación de regularidades numéricas, curiosidad e interés por investigarlas en contextos diversos. Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.
- Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.

En relación a estos contenidos, se plantearán una serie de actividades que se llevarán a cabo en el aula, cuya finalidad principal es que los estudiantes vean la aplicación de estos conceptos en sus vidas cotidianas, que los entiendan de forma significativa y además, se fomentará el uso de las TICs y la interdisciplinariedad.

En suma, se trabajarán todas y cada una de las competencias básicas gracias al Proyecto de Investigación. A continuación se detalla el modo en el que se contribuye a la adquisición de cada una de ellas:

- 1. Competencia en comunicación lingüística.** Desarrollaremos esta competencia mediante la búsqueda de información, síntesis de las ideas principales obtenidas, redacción del proyecto con sus respectivas explicaciones y justificaciones, exposición del proyecto y, por último, recopilación de lo mejor de cada estudio para entre todos elaborar un único proyecto para toda la clase.
- 2. Competencia matemática.** Esta competencia estará presente en todo momento ya que se trabajarán conceptos matemáticos.
- 3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.** Dado que estamos relacionando el tema de sucesiones con situaciones reales, tales como la

propagación de enfermedades, por ejemplo, estaremos trabajando esta competencia de forma directa.

4. **Tratamiento de la información y competencia digital.** Mediante el uso del ordenador para obtener toda la información necesaria, el uso de la calculadora gráfica y uso de programas para realizar las presentaciones de los trabajos.
5. **Competencia social y ciudadana.** Los estudiantes tendrán que trabajar de forma cooperativa en grupos, siendo tolerantes con sus compañeros, debatiendo unos con otros para llegar a un acuerdo de todos los componentes, siempre con respeto y orden.
6. **Competencia cultural y artística.** Se trabajará esta competencia mediante el manejo de información de actualidad, lectura de noticias de prensa o artículos de revistas, entre otros. Además, los estudiantes tomarán imágenes y/o vídeos de todo el proceso para, finalmente obtener una exposición lo más elaborada posible.
7. **Competencia para aprender a aprender.** Relacionaremos muy directamente esta competencia con el proyecto de investigación, ya que los escolares consolidarán sus conocimientos matemáticos mediante su aplicación en situaciones reales, por lo que aprenderán de forma significativa y verán la funcionalidad de las matemáticas en su entorno.
8. **Autonomía e iniciativa personal.** Se trabajará esta competencia intensamente dado que los estudiantes llevarán a cabo una pequeña investigación que les dará autonomía en la toma de decisiones y en la búsqueda de soluciones, fomentando así la confianza en sí mismos.

2.3. Antecedentes de la investigación

Son muchas las investigaciones existentes centradas en el estudio de las ecuaciones en diferencias y de las ecuaciones diferenciales aplicadas a la biología y a otras ciencias. En este apartado, haremos una breve descripción de algunas de ellas, centrándonos principalmente en el concepto de ecuaciones en diferencias. Además, para fomentar el uso adecuado de la calculadora a lo largo de este trabajo, hemos tomado como referencia el estudio realizado en [3] donde se pone de manifiesto la utilización de la calculadora para realizar actividades de razonamiento inductivo.

Para comenzar, destacamos [1] donde se presenta un trabajo cuyo objetivo fundamental es mostrar la interacción entre la biología y las matemáticas, proponiendo distintos fenómenos biológicos tales como la dinámica del ADN, el crecimiento de tumores o dinámica de poblaciones, entre otros.

Otro documento que nos ha servido de inspiración en algunas actividades que aquí se proponen ha sido [11] en el que se proponen una colección de ejercicios resueltos sobre aplicaciones de las ecuaciones en diferencias y diferenciales en biología.

Además de estos estudios de carácter práctico, nos hemos apoyado en [12] que desarrolla de manera teórica un estudio sobre modelos matemáticos, ecuaciones y sistemas de ecuaciones en diferencias, entre otros. Nos ha servido principalmente para la elaboración del proyecto de investigación.

Siguiendo con trabajos teóricos, [13] realiza un estudio sobre los sistemas dinámicos desde el punto de vista teórico. Nos hemos centrado principalmente en la parte que trata la aplicación de la ecuación logística.

[10] Presenta un estudio teórico de introducción a las ecuaciones en diferencias y muestra el paralelismo entre éstas y las ecuaciones diferenciales.

En [16] se describen distintos ejemplos de modelización que se aplican en situaciones cotidianas tratando el concepto de punto fijo y el de ecuación logística, ambos necesarios en el presente estudio.

Los libros [5] y [6] son esenciales desde el punto de vista teórico. Realizan un estudio de las ecuaciones diferenciales y en diferencias de donde hemos extraído la relación expresada mediante la ecuación logística propuesta en el proyecto de investigación.

También se han revisado documentos sobre proyectos de investigación llevados al aula como puede ser [2], donde se analiza la producción matemática de un grupo de estudiantes de secundaria cuando se enfrentan al trabajo de proyectos basado en la modelización de diversas situaciones.

En [7] los autores proponen un aprendizaje de las matemáticas basado en proyectos de investigación con el fin de reconocer la capacidad, responsabilidad y la libertad del estudiante en decidir a trabajar guiados por el profesor.

Para la propuesta del trabajo de investigación sobre la propagación de enfermedades nos ha inspirado la referencia [9].

Con respecto a la forma de trabajar en el aula mediante proyectos de investigación, hemos tenido en cuenta las explicaciones y las ventajas que aparecen en [14].

Finalmente, en [18] se realiza un estudio sobre sucesiones y series desde el punto de vista del aprendizaje significativo, proponiendo una unidad didáctica con numerosas actividades que pueden servir de apoyo en la actividad docente.

3. Diseño de la investigación

La revisión de los estudios previos realizada, nos muestra la gran cantidad de enfoques y de resultados relevantes sobre las concepciones que tienen los estudiantes en el estudio de las sucesiones. Asimismo, nos aportan ideas sobre qué tipo de actividades se pueden proponer para que el aprendizaje no resulte memorístico y se sientan motivados al realizarlas, viendo algunas de las aplicaciones que tienen, en este caso las sucesiones, para el estudio de situaciones reales.

Esta investigación se centra principalmente en fomentar en los estudiantes una actitud positiva hacia las matemáticas de forma que no la asimilen como una materia estancada en el currículo, sino que sientan curiosidad por aprender y por saber más acerca de sus aplicaciones.

3.1. Contexto

Esta propuesta va dirigida al tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Trata del estudio de las ecuaciones en diferencias, en concreto, de las progresiones aritméticas y geométricas y de la ecuación logística, desde un punto de vista distinto al usual.

Pretendemos enfocar estos conceptos dentro de la biología y ciencias de la salud para darles mayor funcionalidad. Para ello se proponen actividades sobre aspectos biológicos en las que se hace uso de las ecuaciones en diferencias, la representación gráfica de sucesiones, la calculadora gráfica y otro software matemático.

En suma, se llevará a cabo una pequeña investigación para consolidar mejor los conocimientos adquiridos y para estimular a los escolares en el aprendizaje de las matemáticas como recurso para modelizar situaciones cotidianas.

3.2. Metodología

Este estudio se llevará a cabo para introducir contenidos relacionados con sucesiones y progresiones en el tercer curso de la ESO. Los estudiantes adquirirán los nuevos

conocimientos de forma significativa al poder aplicarlos directamente en situaciones reales de ámbito biológico.

Difícilmente el alumno podrá construir significados si el contenido es vago, está poco estructurado o es arbitrario, es decir, si no es potencialmente significativo desde el punto de vista lógico.

Nuestro papel como docentes es fundamental para transmitirles a los estudiantes motivación, curiosidad, interés por aprender, ganas de seguir aprendiendo... y todo ello se puede conseguir si orientamos el aprendizaje de las matemáticas desde su punto de vista más funcional, dejando a un lado el aprendizaje mecánico y memorístico así como la resolución de actividades repetitivas.

En este trabajo introducimos las ecuaciones en diferencias, que no son más que una expresión que relaciona distintos términos de una sucesión. Éstas nos serán de utilidad para modelizar diversas situaciones en las actividades propuestas. Además, se tratarán algunos conceptos extracurriculares como la ecuación logística puesto que creemos que, tras introducir las progresiones, los alumnos están capacitados tanto para comprenderlas como para observar su gran utilidad en los procesos de modelización; asimismo, se realiza un acercamiento a conceptos que se corresponden a cursos superiores como es el concepto de límite, ya que consideramos que a partir de una gráfica de una sucesión, los estudiantes pueden observar y entender de forma intuitiva esta noción.

Por último, los escolares trabajarán en grupos de como máximo 3 personas, para llevar a cabo una investigación matemática. Tendrán que buscar información, analizarla y sintetizarla, seleccionando la que le es útil de la que no, y simbolizarla en la búsqueda de regularidades y patrones que ayuden a crear un modelo matemático que represente la realidad en estudio y permita, al operar con él, dar respuesta a dicha problemática. Para ello, tendrán que seguir unas pequeñas pautas, que les sirva de guía y les facilite la resolución del problema.

Esto involucra un gran trabajo, tanto de los alumnos como de los docentes; los estudiantes, al desarrollar la investigación, aprenden a conducirse en sus tareas de indagación y estudio, tanto en forma independiente como colectiva, elaborando y adquiriendo conocimientos con sus compañeros de equipo, utilizando el apoyo de las TICs para lograr los objetivos planteados.

Durante las sesiones de aula, el docente realizará un seguimiento, analizando los errores y dificultades que puedan surgir en el transcurso de la investigación, así como sus avances.

Finalmente, para que quede reflejado el esfuerzo y todo el trabajo de cada grupo, realizarán una presentación y la expondrán para toda la clase. De esta manera, además, podrán observar que, a pesar de que todos los grupos trabajasen en el mismo proyecto, cada uno de ellos lo puede enfocar de una manera u otra, con distintas herramientas y de diversas maneras.

Lo ideal sería que, una vez expuestos todos los trabajos, entre toda la clase lleguemos a un proyecto final y único recogiendo lo mejor del trabajo de cada uno de los grupos.

3.3. Elaboración y aplicación de los instrumentos

3.3.1. Actividades de aplicación

Esta propuesta está pensada para introducir al alumnado en contenidos de sucesiones y ecuaciones en diferencias, haciendo hincapié en los dos tipos de progresiones y su aplicabilidad en las ciencias biológicas y de la salud.

Por ello se plantean una serie de actividades que se realizarán en el aula, todas ellas planteadas desde la biología y ciencias de la salud, con el fin de fomentar la interdisciplinariedad, la motivación de los escolares, el interés hacia las matemáticas y su funcionalidad.

Al resolver problemas se aprende a hacer matemáticas, lo cual constituye uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Con ello aumentan su confianza, tornándose más perseverantes y creativos y mejorando su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas.

A continuación se describen las actividades elegidas para este estudio, cómo se podrían llevar a cabo y lo que se pretende alcanzar con ellas.

❖ **Análisis de los conocimientos previos de los estudiantes sobre los conceptos de interés**

- **Actividad 1:** Define con tus propias palabras los siguientes términos: variable discreta, sucesión, recurrencia, progresión aritmética y progresión geométrica.

Con esta actividad, pretendemos averiguar las concepciones previas que tienen los escolares sobre los conceptos en cuestión para que de esta manera sepamos qué dificultades y errores presentan para ellos.

- **Actividad 2: Problema del trigo y del tablero de ajedrez**

Si se colocase sobre un tablero de ajedrez (lo suficientemente grande) un grano de trigo en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta y así sucesivamente,

- a. ¿Cuántos granos de trigo habría en la sexta casilla? ¿y en la octava?
- b. ¿Cuántos granos de trigo habría en la última casilla del tablero de ajedrez?
- c. ¿Qué relación hay entre el número de granos de trigo en una casilla y en la siguiente?

A través de esta actividad realizaremos un primer acercamiento al concepto de ecuación en diferencias y al de su solución, una progresión geométrica. Los estudiantes tendrán que deducir que, en cada casilla, el número de granos de trigo es el doble que en la anterior, de esta forma podrán dar la expresión de la ecuación en diferencias correspondiente. Además, observarán que a partir del término general de la progresión geométrica se pueden obtener el número de granos de trigos que hay en la última casilla del tablero de ajedrez, sin tener que calcular todos los anteriores.

Una vez realizada la actividad, los estudiantes leerán la famosa leyenda del ajedrez y los granos de trigo y para finalizar deberán contestar a la siguiente pregunta en la que tendrán que hacer la suma de una cantidad finita de términos de la progresión geométrica:

- d. ¿Cuántos granos de trigo le pidió Sissa al rey Sheram finalmente? ¿Pudo dárselos? ¿Por qué?

❖ **Aplicación de lo aprendido:**

- **Actividad 3:** La amanita muscaria es un tipo de seta venenosa que se encuentra frecuentemente durante el otoño en bosques templados en donde hay mucha humedad y las temperaturas no suelen bajar mucho. Imagina que vas por el bosque y te encuentras con 3, sabiendo que cada día aparecen 4 más, determina:
 - a. ¿Cuántas amanitas encontrarás si vas dos semanas después a ese mismo bosque?
 - b. ¿Cuántas habrá al cabo de n semanas?
 - c. ¿Qué relación hay entre el número de amanitas que encuentras en un día y en las que hay al día siguiente?
 - d. Representa gráficamente esta situación utilizando la calculadora. ¿Qué observas?

En primer lugar deberán deducir que el crecimiento de estas setas sigue una progresión aritmética, por lo que tendrán que obtener su expresión general identificando el primer término y la diferencia. Además, tendrán que deducir que la relación entre las setas que había inicialmente y las que había el día siguiente, consiste en un aumento de cuatro setas, lo cual les permite escribir la ecuación en diferencias. Por último, haremos uso de la calculadora gráfica para representar una cantidad finita suficientemente grande de términos de la solución de la ecuación en diferencias. Se profundizará en el análisis del carácter discreto de la variable "tiempo" y en la infinitud de las sucesiones, introduciendo intuitivamente el concepto de función discreta.

- **Actividad 4:** Se tiene una colonia de bacterias en la que cada bacteria se reproduce asexualmente, dividiéndose en dos bacterias tras la duplicación de su material genético. Esta división se produce cada hora. Realiza un pequeño esquema para visualizar mejor el proceso.
Si la población inicial es de 100 bacterias:
 - a. ¿Cuál será el número de bacterias que tendrá la colonia cuando hayan pasado 3 horas?
 - b. ¿Y cuando hayan pasado n horas?
 - c. ¿Qué relación hay entre el número de bacterias en una hora determinada y el número de bacterias en la siguiente hora?
 - d. Representa gráficamente esta situación haciendo uso de la calculadora. ¿Qué observas?

Los estudiantes tendrán que hacer un esquema adecuado del proceso que les facilitará darse cuenta de que se trata de una progresión geométrica. Deberán deducir cuál es la razón y dar su término general para poder obtener cualquier otro valor a partir de la condición inicial. De nuevo tendrán que dar la expresión de la ecuación en diferencias correspondiente, para saber qué relación existe entre cada hora y su siguiente, además de obtener su representación gráfica.

Mediante estas dos actividades (actividad 3 y 4) los estudiantes observarán la aplicación de las ecuaciones en diferencias en una ciencia que es conocida para ellos como la biología y establecerán una conexión entre ambas ciencias: biología y matemáticas. Por otro lado, una vez que entiendan el comportamiento de cada sucesión y vean de qué manera crece en cada caso, la representación gráfica les permitirá detectar los posibles errores que hayan tenido en la modelización.

❖ **Interpretación de gráficas de sucesiones en situaciones reales:**

- **Actividad 5:** Interpreta el significado de las siguientes gráficas de sucesiones inventando un posible enunciado, que se ajuste a una situación real, y que verifique las condiciones expuestas en cada una de las imágenes. Indica cuáles son las variables x e y en cada caso y di si se trata de una progresión aritmética o geométrica justificando la respuesta. Indica hacia dónde crees que tiende cada sucesión.

Gráfica 1:

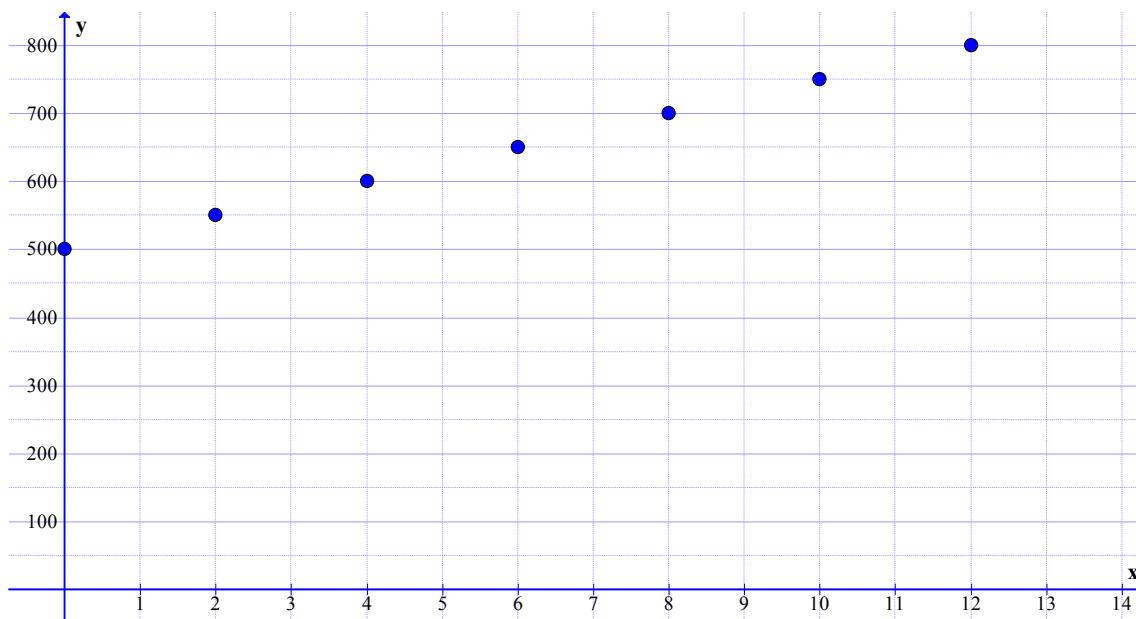


Imagen 1: Gráfica 1 presentada en la actividad 5.

Gráfica 2:

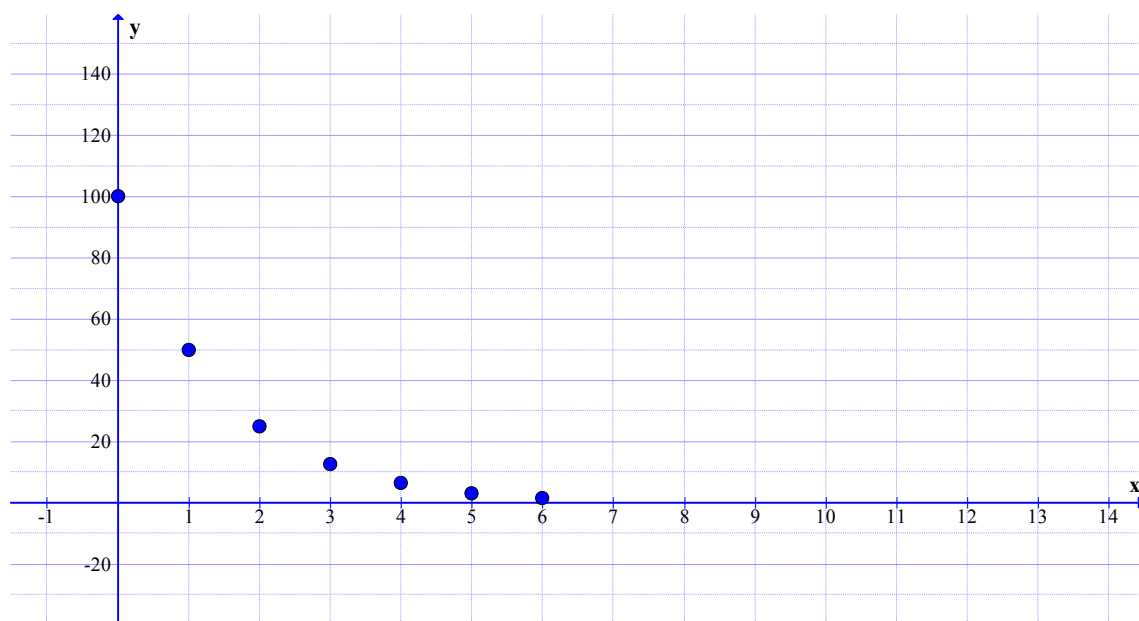


Imagen 2: Gráfica 2 presentada en la actividad 5.

Gráfica 3:

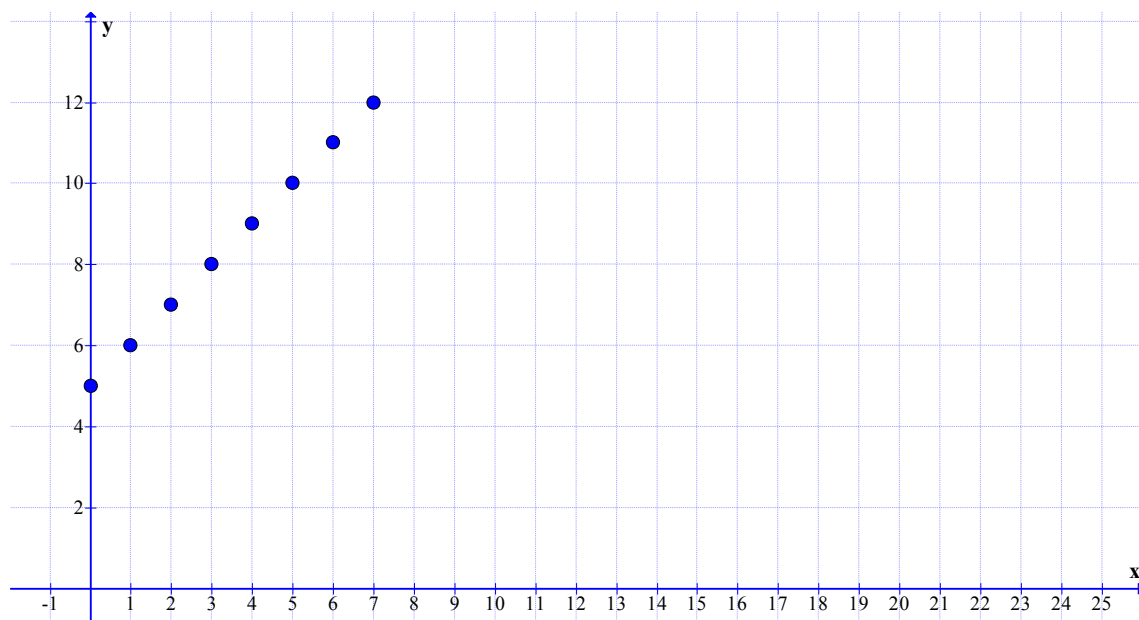


Imagen 3: Gráfica 3 presentada en la actividad 5.

Gráfica 4:

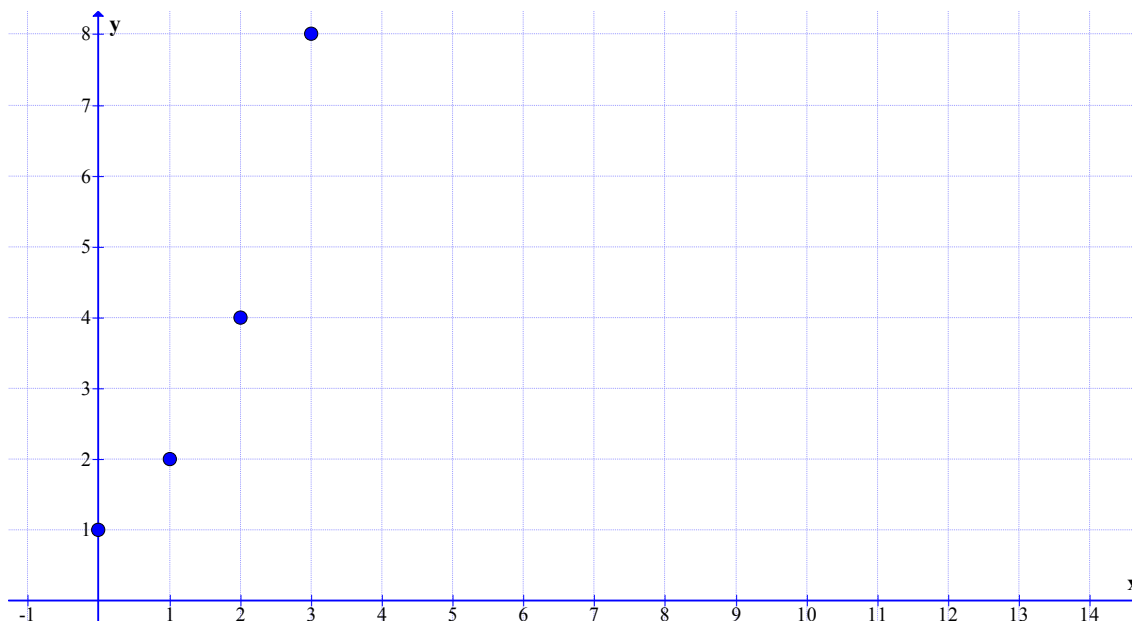


Imagen 4: Gráfica 4 presentada en la actividad 5.

Mediante esta cuestión, los estudiantes tendrán que desarrollar sus capacidades de creatividad e imaginación para inventar un enunciado real acorde a cada situación. Analizaremos si los alumnos son capaces de interpretar gráficas de sucesiones e identificar qué gráficas se corresponden a una progresión geométrica y cuáles a una progresión aritmética. Además de esto, introduciremos de forma intuitiva el concepto de límite de una sucesión.

❖ **Actividades de profundización:**

- **Actividad 7:** Para dos poblaciones de aves que crecen independientemente una de la otra, obtenemos las siguientes ecuaciones en diferencias, donde n representa el tiempo en días:

1. $x(n + 1) = x(n) + 10$
2. $x(n + 1) = 0,5 \cdot x(n) + 30$

- a. Realiza una tabla de valores para cada ecuación ayudándote de la calculadora.
- b. Representa gráficamente, haciendo uso de la calculadora, cada situación en función del tiempo n . ¿Cuál de estas poblaciones es más realista? Justifica tu respuesta.
- c. ¿Qué pasaría si se diese la primera situación en la realidad?

En esta actividad, los estudiantes tendrán que obtener distintos valores para cada una de las ecuaciones, haciendo uso de la calculadora, y recogerlos en una tabla. Una vez hecho esto, tendrán que representar dichos valores y observarán que la ecuación correspondiente a la primera población de aves no es realista ya que crece indefinidamente con el tiempo, sí que lo sería en un plazo corto de tiempo pero no a largo plazo. Tendrán que explicar, a su manera, qué pasaría si se diese esa situación. En cambio, en la segunda situación observarán que el crecimiento de la población de aves se estabiliza con el tiempo, lo cual es más realista.

- **Actividad 8:** Sea a_n el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo n en años. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma:

$$a_{n+2} = \frac{3}{2} \cdot a_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot a_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

- Si inicialmente ($n = 0$) hay una población de 100 individuos, ¿cuántos cabe esperar que haya al año siguiente?
- Sabiendo además que en el primer año hay 250 individuos, ¿cuántos habrá en el segundo año? ¿Y en el tercero? ¿Y en el cuarto?
- ¿Serías capaz de deducir qué ocurre a largo plazo con la población? Comprueba que la población se estabiliza. Haz uso de la calculadora si lo necesitas.

Esta actividad se propone con el fin de que los alumnos se percaten de la necesidad de las condiciones iniciales para poder obtener las soluciones de una ecuación en diferencias. Todas las ecuaciones que se han visto con anterioridad son de orden uno, por lo que con la condición inicial es suficiente, sin embargo, para que los alumnos no actúen de modo mecánico, en esta tarea se propone una ecuación en diferencias de orden dos en la que es necesario partir de dos valores previos, el correspondiente a los momentos $n = 0$ y $n = 1$. Se plantean distintos apartados para guiar al alumnado hacia esa necesidad de tener más datos para poder resolver el problema.

3.3.2. Proyecto de investigación

Una de las herramientas más interesantes de las que actualmente disponemos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema biológico es la construcción y posterior simulación de un modelo matemático.

En este sentido, llevaremos a cabo un proyecto de investigación en el cual los estudiantes trabajarán en pequeños grupos (3 personas máximo y 2 como mínimo) para elaborar un modelo matemático en el que verán la aplicación de las matemáticas en situaciones reales.

Tendrá lugar una vez introducidas en el aula las sucesiones y las ecuaciones en diferencias. Consistirá en un proyecto interdisciplinar en el que los estudiantes tendrán que obtener, entre otras cuestiones, una ecuación en diferencias que describa la evolución del contagio de una enfermedad, el Ébola.

Nuestra meta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por proyectos de investigación es que los estudiantes conecten lo aprendido en el aula con la realidad que van a modelizar, percatándose de la belleza y utilidad de las matemáticas en conexión con otras ciencias como la biología. Esto deriva en que adquieran y retengan conocimientos de un modo más espontáneo, además de lograr una mejora en el desarrollo de sus habilidades y capacidades matemáticas.

En suma, aprenderán a trabajar en equipo, a tomar decisiones, a buscar y depurar informaciones, a llevar un control del tiempo, a desarrollar destrezas de comunicación y resolución de problemas.

A continuación se detallan las pautas y pasos que los estudiantes deberán seguir para llegar a ese modelo de forma óptima.

Título del proyecto: Matemáticas en acción... ¿También en un hospital?

- **¿Qué es un proyecto de investigación?** Empezaremos el estudio intentando definir este concepto entre todos. Los estudiantes aportarán definiciones y el docente apuntará las ideas principales de lo que entiende cada uno por proyecto de investigación, llegando finalmente a una definición semejante a la siguiente:

“Un proyecto de investigación es un procedimiento que, siguiendo el método científico, pretende recabar todo tipo de información y formular hipótesis acerca de cierto fenómeno social o científico, empleando las diferentes formas de investigación.”

- **¿Para qué vamos a realizar un proyecto de investigación?** Los estudiantes tendrán que exponer sus ideas y opiniones sobre lo que consideren que van a conseguir o alcanzar con este estudio. Podríamos dar respuesta entre todos a la pregunta “para qué” aportando las siguientes justificaciones:
 - Para trabajar de forma cooperativa.
 - Para establecer una conexión entre las matemáticas y otras ciencias como la biología.
 - Para poder ver de una forma directa la funcionalidad de las matemáticas en situaciones cotidianas.
 - Para fomentar nuestra creatividad y curiosidad.
 - Para aprender a buscar información y decidir cuál es relevante y cuál no.
 - Para consolidar los conocimientos que hemos adquirido.
 - Para mejorar nuestra capacidad de abstracción matemática.
 - Para aprender a modelizar situaciones reales.

➤ **¿Cómo y con quién vamos a trabajar?**

El docente determinará los grupos de trabajos por orden de lista de como máximo 3 componentes y como mínimo 2. De esta manera, se evitarán posibles rechazos o discusiones entre los escolares.

Antes de empezar la investigación, se les entregará un cartelito con sus nombres, apellidos, curso, nombre del centro, nombre de la materia (Matemáticas) y la palabra investigador, que deberán llevar colgado a modo de collar durante el horario lectivo. Además se les propondrá que traigan los materiales o la vestimenta que ellos consideren que necesita un investigador.

Creemos que los estudiantes tienen una concepción errónea sobre el personaje investigador, quizás porque asocian al investigador como una persona que lleva bata blanca, gafas de plástico transparentes, probetas...etc. que es lo que se suele representar en películas y series de televisión. Por este motivo, queremos observar cómo ellos ven a una persona que se dedica a investigar y corregir posibles concepciones erróneas, ya que no hay ningún prototipo específico de investigador.

En cada grupo deberán nombrar a un director del proyecto y a un secretario, que serán los principales responsables de la organización y elaboración del proyecto. El director será el mayor responsable del proyecto. Tendrá que mantener el orden en el grupo, llevar a cabo el cumplimiento de los tiempos y el que tome todas las decisiones finales. El secretario se encargará de realizar un diario de investigación con toda la información que vayan obteniendo; tomar imágenes y/o vídeos si lo desean de cómo están realizando el proyecto y de informar al profesor/a de la evolución del mismo.

➤ **Planteamiento del problema.**

Pongámonos en la tesitura de que en España hay un brote de Ébola - algo que podría suceder realmente -, de manera que aparecen inicialmente 100 habitantes infectados. Salta la alerta en todo el país por lo que aumenta la angustia, la desesperación, las ganas de aislarse del mundo y de emigrar para intentar salvar sus vidas. Pero, debido al peligro que supone tanto que una persona salga del país, por poder estar infectado y propagar la enfermedad en otro país, como porque entre alguien al país y también ser contagiado, se impiden totalmente las salidas y entradas en España. Todo el país permanece aislado del resto del mundo, por lo que es muy probable que se acaben infectando cada vez más españoles con el tiempo.

En vuestras manos está estudiar esta enfermedad a fondo, para conocer cuáles son los síntomas, cómo se contagia, qué medidas de prevención hay que tomar y proponer una solución para que el número de infectados no crezca indefinidamente pudiendo acabar con toda la población, lo cual sería una catástrofe.

1) ¿Cuál es la información que realmente necesitamos?

Dentro de este apartado los estudiantes deberán buscar información en Internet, libros y/o en revistas sobre las siguientes cuestiones para, de esta manera, guiarles en sus trabajos:

- a. ¿Qué es el Ébola?
- b. ¿Cuáles son sus síntomas?
- c. ¿Cómo se contagia?
- d. Busca datos y cifras sobre las infecciones de Ébola. ¿En qué lugares es más frecuente?
- e. Analiza por lugares el número de muertes por Ébola en función del número de infectados. ¿Cuál es el porcentaje de muertes en cada lugar?
- f. ¿Cuál es el número de médicos, enfermeros y auxiliares por número de habitantes en los lugares donde está más presente el Ébola?
- g. Busca el número de habitantes que hay en España.
- h. Analiza el tipo de población que hay en España, cuál es su crecimiento, cómo se distribuye en cada Comunidad Autónoma y dónde está más concentrada la población.
- i. Obtén información acerca del gasto que supone atender a un enfermo de Ébola, hacer una prueba en el laboratorio de si hay infección o no, y de hacer un seguimiento a un sospechoso de Ébola.
- j. ¿Qué es la OMS? ¿Cuáles son sus funciones principales?

2) ¿A qué se reduce ahora el problema?

Con toda la información recogida, se plantean las siguientes cuestiones que tendrán que analizar, debatir entre sus compañeros y resolver.

- a. Describe una variable que indique el número de infectados en España en función del tiempo t en días. De la misma manera, deduce cómo representarías el número de españoles no infectados pero susceptibles de serlo.
- b. Supón que cada uno de los 100 infectados inicialmente está en contacto con el resto de población no infectada y que esta enfermedad se contagia con una probabilidad de 2 sobre el número total de individuos. ¿Cuántos enfermos habría en el primer día? ¿Y en el segundo? ¿Cuántos enfermos habría en España en una semana? Puedes elaborar, con ayuda de la calculadora, una tabla que te facilite los cálculos.
- c. Deduce una ecuación que te aporte información sobre la relación entre el número de infectados en el día t y en el día $t + 1$.

Los estudiantes tendrían que llegar a las siguientes conclusiones:

Si hay un total de N individuos en la población, sabemos que hay un número de infectados por Ébola y otros que no lo están pero que están en contacto con los infectados. Por lo tanto, deberemos asignar una variable al número de infectados en cada instante de tiempo t . Sea $x(t)$ la variable que nos da el número de infectados por Ébola en el instante t (días), de aquí se puede deducir, por tanto, que el número de no infectados en cada instante t vendrá dado por la expresión $N - x(t)$, puesto que N representaba el número total de individuos. Como estamos suponiendo que la probabilidad de contagio es $\frac{2}{N}$ y que se juntan los infectados con los que no lo están, el número de infectados en el instante $t + 1$ vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$x(t + 1) = \frac{2}{N} \cdot x(t) \cdot (N - x(t))$$

- d. Teniendo en cuenta el número inicial de infectados y la población de España, elabora una tabla de valores y una gráfica, haciendo uso de la calculadora, donde se recoja el

número de infectados a lo largo del tiempo que consideres oportuno desde el momento en que se empieza a propagar la enfermedad. ¿Qué observas?

Los estudiantes observarán que, a medida que pasa el tiempo, el número de infectados de Ébola es igual al número de personas sanas, es decir, el número de enfermos se estabiliza a lo largo del tiempo.

- e. ¿Cuántos enfermos cabe esperar que haya en España al cabo de un mes?
- f. ¿Podríamos pensar en un número inicial de enfermos, para que, al cabo de 2 meses, toda la población esté infectada? Haz las pruebas que consideres oportunas y justifica tu respuesta.

Los escolares deberán darse cuenta de que, aunque cambien el número de infectados que hay inicialmente, no es posible que toda la población esté infectada, a no ser que supongamos que inicialmente estamos todos enfermos por el Ébola.

- g. Llevando a cabo todas las medidas de prevención para evitar en lo posible el contagio, ¿piensas que se podría erradicar la enfermedad? ¿Cómo lo harías? ¿Qué pasa si la probabilidad de contagio es menor? Haz la demostración y estudia el comportamiento.

En este apartado, deberán probar qué ocurre si la probabilidad de contagio es menor, podríamos probar con $\frac{1,5}{N}$ y, obteniendo los valores con la calculadora y representándolos, los estudiantes observarán que la enfermedad se erradica con el tiempo.

- h. Debido a que las medidas de prevención no han sido suficientes y muchos médicos/as no las han cumplido, la probabilidad de contagio ha aumentado un poco ($\frac{3}{N}$ aproximadamente), analiza qué ocurre ahora representando de nuevo la situación. ¿Qué observas?

Al obtener distintos valores a partir de la ecuación, los escolares observarán que el número de infectados oscila con el tiempo entre dos únicos valores.

- i. Estudia el comportamiento del número de infectados en el caso de que la probabilidad de contagio sea $\frac{3,6}{N}$. ¿Qué conclusiones obtienes?

Con esta cuestión pretendemos que los estudiantes observen el comportamiento caótico que se presenta en esa situación.

- j. Imagina que formáis parte de la OMS. Poneros en la situación de que las tres cuartas partes de la población española sufre Ébola, el 10% restante de la población necesita hacerse una prueba en el laboratorio para confirmar si tienen Ébola o no y de ese 10%, el 30% necesita un seguimiento por sospecha de que tengan Ébola. ¿Cuánto dinero necesitaríamos en España para poder afrontar esta situación en el primer mes? Si a partir del primer mes, el número de infectados por Ébola se incrementa en 20 más cada mes, ¿cuánto costaría afrontar la situación en el segundo mes? ¿Y al cabo de un año? Modeliza esta situación mediante una ecuación que te aporte información sobre los gastos en función del tiempo expresado en meses.

En primer lugar, los estudiantes tendrían que darse cuenta de expresar todo en función del número de infectados por Ébola en cada instante de tiempo t expresado en meses. Una vez que hagan eso, deberán plantear la ecuación que les informe sobre el dinero que costaría el mantenimiento de esas circunstancias en función del tiempo y, por último, añadir la constante, llamada diferencia, que sería 20 enfermos por el coste de cuidar cada uno. Esto daría lugar a una sucesión aritmético-geométrica.

3) ¿Y qué hacemos ahora con todo esto?

Para finalizar el proyecto, los estudiantes deberán recopilar todo el material que encontraron, todos los cálculos que hicieron, todas las pruebas con sus respectivas explicaciones de por qué lo habían hecho así hasta la solución final y óptima del problema. Con ello, deberán realizar una presentación que expondrán para toda la clase en la que deberán realizar una reflexión final acerca de los siguientes puntos:

- ¿Te ha gustado esta actividad? ¿Por qué sí/no?
- ¿Qué has aprendido gracias a este proyecto?
- ¿Por qué consideras que son necesarias las matemáticas en otras ciencias y en la vida real?

4. Objetivos de la futura experiencia de aula

Este estudio se propone con el fin de llevarlo a la práctica con un grupo de estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Dado que de momento esto no se va a realizar, a continuación se plantean algunas cuestiones a las que se intentará dar respuesta una vez que se lleve a cabo esta propuesta en el aula:

- ¿Cuál es la idea intuitiva que tienen los estudiantes sobre los conceptos de variable discreta, sucesión, recurrencia, progresión aritmética y geométrica?
- ¿Qué dificultades presentan en el aprendizaje de las ecuaciones en diferencias, en particular, progresión aritmética, progresión geométrica y ecuación logística?
- ¿Qué errores principales comete el alumnado cuando se les proponen actividades sobre estas nociones?
- ¿Son capaces de obtener la expresión general de una ecuación en diferencias mediante el enunciado de un problema?
- ¿Qué dificultades y errores presentan al representar e interpretar las gráficas de sucesiones con la calculadora?
- ¿Son capaces de identificar sucesiones en nuestro entorno?
- ¿Sabrían proponer un enunciado real a partir de gráficas de sucesiones?
- ¿Es útil la elaboración de una tabla de valores o de una gráfica, haciendo uso de la calculadora, para tener una idea intuitiva del concepto de límite?
- ¿Qué dificultades presentan a la hora de obtener información y decidir cuál es la importante y cuál es superflua?
- ¿Son capaces de obtener un modelo matemático que describa una situación real a partir de esa información obtenida?
- ¿Qué errores cometen al modelizar?

Como conclusiones de esta investigación, cabe citar que este trabajo que presentamos muestra un ejemplo de actividad poco común en las aulas de matemáticas y que, a nuestro parecer, combina numerosos procedimientos y elementos propios de la actividad matemática. Entendemos que puede ser útil a la hora de ayudar al alumnado a desarrollar capacidades de abstracción y creatividad, fomentando su interés y su autoestima.

Asimismo, los estudiantes compartirán ideas entre ellos, gracias al trabajo en grupo, expresarán sus propias opiniones y negociarán las soluciones, habilidades necesarias en sus futuros desempeños como profesionales. Esta estrategia de enseñanza-aprendizaje también les posibilita formas prácticas para afrontar el mundo real y saber usar adecuadamente las tecnologías de la información y de la comunicación.

Nuestra idea es continuar con este trabajo docente ya que abunda en posibilidades para el desarrollo del pensamiento matemático en nuestras aulas, además de que tiene la virtud de permitir que los alumnos aprecien las matemáticas con una visión más amplia y humana de esta ciencia y sus aplicaciones en el entorno en que vivimos.

5. Referencias bibliográficas

- [1] Álvarez-Nodarse, A. (2005): Modelos matemáticos en biología: un viaje de ida y vuelta. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. N°0 (0000), pp. 1–40. Universidad de Sevilla. Sevilla (España).
- [2] Aravena, M.; Caamaño, C.; Giménez, J. (2008): Modelos matemáticos a través de proyectos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(1), pp.49-92. México D. F. (México).
- [3] Contreras, M. (2014): “Sucesiones numéricas. Progresiones” en Carrillo de Albornoz (Ed.): Matemáticas con Calculadora 3º de ESO. CASIO ESPAÑA S. L. y Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, pp. 57-76. Barcelona, Sevilla. (España).
- [4] Decreto 133/2007, del 5 de julio, por el que se regulan las enseñanzas en educación secundaria obligatoria en la Comunidad Autónoma de Galicia. DOG. Galicia. (España).
- [5] Fernández, C.; Vázquez, F.J.; Vegas, J.M. (2003): Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Ed. Thomson. Madrid (España).
- [6] Fernández, C.; Vegas, J.M. (1996): Ecuaciones diferenciales II. Ed. Pirámide. Madrid (España).
- [7] Flores, D.; Medina, B.; Peralta, D.M.; Rodríguez, C. (2013): Investigación para modelar con matemáticas. Estrategia de aprendizaje. Actas de VII CIBEM, Montevideo (Uruguay). Recuperable en el link <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/487.pdf> [Consultado en marzo 2015]
- [8] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE. Madrid. (España).
- [9] Montesinos-López, O.A.; Hernández-Suárez, C.M. (2007): Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. Salud Pública Mex 2007; 49:218-226. Morelos (México).
- [10] Navarrete, G.A. (2003): Introducción a las ecuaciones en diferencias. Trabajo fin de grado, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá (Colombia).
- [11] Navas, J. (2002): Laboratorio de modelos matemáticos en biología. Universidad de Jaén. Jaén (España).
- [12] Navas, J. (2009): Modelos matemáticos en biología. Universidad de Jaén. Jaén (España).
- [13] Plaza, S. (2007): Introducción a los sistemas dinámicos. 4º Encuentro de Biomatemática. Universidad Tecnológica Metropolitana (UTEM) Santiago de Chile (Chile). Recuperable en <http://fermat.usach.cl/~dynamics/DynSystSPlaza.pdf> [Consultado en marzo 2015]
- [14] Peralta, D.Ma.; Medina, B. (2007): Proyectos de investigación. Estrategia de aprendizaje en matemáticas. UNAM, CCH Plantel Sur. XII CIAEM. Querétaro (México). Disponible en http://centroedumatematica.com/ciaem/memorias/xii_ciaem/155_proyectos_investigacion.pdf [Consultado en marzo 2015]
- [15] Rodríguez, M.E. (2011): La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. Revista Números, Vol. 77, pp-35-49. Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. La Laguna, Tenerife (España).
- [16] Sandoval, M.L.; Juárez, L.H. (2009): Simulación de modelos en ecuaciones diferenciales ordinarias. Universidad Autónoma Metropolitana. México D. F. (México).

[17] Velasco, J. (2012): "Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones a la dinámica de poblaciones". en Lourdes Esteva y Manuel Falconi (Eds.): Biología matemática. Un enfoque desde los sistemas dinámicos, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, pp. 67-95. México D. F. (México).

[18] Velásquez, F.D (2012): El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo. Trabajo Final y requisito parcial para optar al Grado de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín (Colombia).