¿Se puede introducir la idea de infinito, la base del concepto de límite, en 1º de la ESO?

Xavier Vilella Miró

email: xvilella@xtec.cat

Grup Vilatzara ICE Universitat Autònoma de Barcelona

Formador del profesorado para ICEs de Universidades y para el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya

RESUMEN

Mi respuesta a la pregunta del título es SÍ. La clave del éxito es proponer unas tareas al alumnado que le lleven a construir por sí mismo este concepto. Partiendo del mito del Ojo de Horus, mediante el uso de representaciones de fracciones a partir de un cuadrado unidad, pasamos a representar fractales sencillos diversos, en los que nos preguntamos hacia qué valor tienden las sumas de partes. La calculadora nos evitará tener que realizar largas sumas de fracciones a mano. Al final, en poco tiempo, el alumnado llega a la conclusión de que la suma puede acercarse tanto como se quiera a un valor, sin llegar nunca a ser exactamente ese valor. ¿A qué nos suena esto?

Palabras clave: suma, fracción, serie, infinito, límite

¿Se puede introducir la idea de infinito, la base del concepto de límite, en 1º de la ESO?

.
El punto de partida es el mito del Ojo de Horus, llamado “Udyat”. “Udyat” significa “el que está completo”. Por lo tanto, el alumnado debe buscar información sobre este mito, tomar unas notas en su libreta de matemáticas y ser capaz de presentarlo a toda la clase. Así empieza esta secuencia didáctica que nos llevará a poner las bases del concepto de límite en primero de la ESO.

El profesor focalizará la atención del alumnado en verificar si realmente el Ojo de Horus está completo o no. La suma de la serie de fracciones representadas en el Ojo (mitad, cuarto, octavo, dieciseisavo, treintaidosavo, sesentaicuatroavo) comprueban que no da la unidad. Falta un *trocito* de Ojo.

¿Qué *trocito* falta? Una fracción igual a la última fracción sumada. Probemos de añadir a la suma la siguiente fracción siguiendo la serie: el ciento veintiochoavo. En este punto algunos alumnos o alumnas ya levantan la mano: han razonado antes de realizar la operación y saben que no hace falta hacer la suma, que no llegaremos a la unidad. ¿Por qué? No resulta difícil argumentar que el *trocito* añadido es menor que lo que faltaba en la última suma.

Hasta aquí vamos discutiendo aspectos esenciales y básicos de las fracciones: comparándolas, sumándolas, utilizamos propiedades de las operaciones. El papel del profesor es estructurar todo esto durante el desarrollo de la sesión de clase.

Sigamos. Para poder asegurarnos de que todo nuestro alumnado comprende la aparente paradoja (una suma de tantos términos como queramos que nunca llegará a sumar la unidad) recurrimos a la representación. Dibujamos un cuadrado de una unidad de lado y vamos señalando las fracciones que sumamos: la mitad, dividimos por la mitad y pintamos esta parte; la cuarta parte, dividimos en dos partes iguales la mitad que no estaba pintada y la pintamos a su vez, y así sucesivamente. En cuanto llegamos a la quinta fracción de la serie, toda la clase puede constatar que no llenamos el cuadrado entero. Al añadir la sexta fracción de la serie, el problema persiste, pero el área sin pintar es mucho más pequeña ¿Cuánto más pequeña? La suma de la serie está representada por la parte pintada.

Normalmente, en la pizarra o en las libretas cuadriculadas la representación propuesta no permite ir mucho más allá de la sexta o séptima fracción de la serie. Por ello, resulta muy conveniente acudir a Geogebra: sucesivas ampliaciones del campo de trabajo permiten llegar al término que quieras de la serie. En cuanto retrocedes y vuelves al cuadrado original de lado unidad puedes observar que aparentemente ya has llenado de pintura todo el cuadrado, aunque sabes que no es cierto. Así pues, con la suma de la serie de fracciones estaremos tan cerca de la unidad como queramos pero sin llegar nunca a la unidad.

Aquí podemos introducir algo de lenguaje matemático: por ejemplo, la fracción ¼ se puede escribir como $½^2$. Si aplicamos esta representación a las siguientes fracciones, aparecen en los denominadores las potencias de 2, lo que nos lleva a escribir $1/2^n$. Si ***n*** tiende a infinito, entonces la suma de la serie tiende a ***1***. Cuantos más términos añadamos a la suma, más cerca estaremos de la unidad; si fuéramos capaces de sumar infinitos términos, ¿dónde estaríamos? La respuesta resulta evidente para gran parte del alumnado: en la unidad.

Para asegurar la comprensión de este difícil concepto, usaremos ahora los fractales. Partiendo del *quasifractal* llamado Conjunto de Cantor, podemos proponer que calculen la suma de los segmentos que van quedando en cada iteración, si partimos del segmento unidad. Buena parte del alumnado se da cuenta de que este problema se parece al anterior (el del Ojo de Horus) sólo que ahora la suma se va haciendo tan pequeña como queramos sin llegar nunca a ser cero. Cuando las iteraciones van aumentando la suma de los segmentos que quedan se reduce mucho. Hemos de plantear la conclusión en los nuevos términos que acabamos de introducir: cuando las iteraciones tienden a infinito, la suma tiende a cero.

Aún podemos usar otro fractal, como la curva de Koch, para mostrar el poder de esta nueva herramienta que acabamos de presentarles: otra vez, si el segmento inicial mide la unidad, vayamos sumado los segmentos que aparecen en cada iteración. Ahora lo que ocurre es que la suma se va haciendo cada vez mayor. Pero... ¿cómo va aumentando? Algunos alumnos advertirán enseguida que el crecimiento se ralentiza mucho, y pondrán en duda que la suma tienda a infinito (a estas alturas de la secuencia, algunos alumnos ya usan esta terminología). ¿Cómo podemos *ver* esta tendencia?

Yo les propongo usar Geogebra: representar la suma total en cada iteración permite descubrir que, por lo que se puede ver, el crecimiento no tiene un *tope* (en sus palabras) pero debes sumar muchísimos términos para conseguir un crecimiento evidente. Este es un buen momento para discutir si la curva de Koch superará el *ancho* del segmento inicial, y el *alto* de la primera iteración. Este reto no está al alcance de todo el alumnado pero sí de una parte de él, y vale la pena intentar que lo comprendan. La sorpresa está asegurada: una suma que llegará al infinito, ¡¡sin salirse de unos márgenes finitos y determinados!!

En esta secuencia se trabaja con fracciones, con operaciones y sus propiedades, pero siempre usándolas como herramientas para conseguir un objetivo mucho más atractivo y ambicioso, llegando a poner las bases de lo que en el futuro se les presentará como el concepto de límite, relacionado con el de infinito.

Xavier Vilella Miró