

Modelos geométricos griegos como herramienta didáctica para explicar fenómenos astronómicos

Carles Puig-Pla

email: carles.puig@upc.edu

Universitat Politècnica de Catalunya – Barcelona

RESUMEN

A partir del conocimiento de los movimientos aparentes de los astros observables a simple vista, diferentes modelos geométricos utilizados por los antiguos griegos permitieron explicar “apariencias” celestes. En particular el universo de las dos esferas, el sistema de las esferas homocéntricas presentado por Eudoxo y modificado posteriormente por Aristóteles, el círculo excéntrico empleado por Hiparco o el sistema epiciclo-deferente usado por Ptolomeo constituyen modelos geométricos que pueden usarse como recursos didácticos que muestren, por ejemplo, como predecir el movimiento estelar o cómo los griegos explicaron las retrogradaciones.

Palabras clave: *Geometría, Astronomía griega, movimiento planetario, universo de las dos esferas, esferas homocéntricas, círculo excéntrico, sistema epiciclo-deferente.*

1. Introducción

Los orígenes de la ciencia occidental se encuentran en la civilización helénica [1]. Los antiguos griegos, a diferencia de otros pueblos civilizados de la antigüedad como los egipcios o los babilónicos, elaboraron una cosmología racional. Las mentes imaginativas de los antiguos filósofos griegos buscaron comprender, describir y explicar los fenómenos naturales mediante la lógica y las matemáticas y descartaron concepciones de carácter mitológico y sobrenatural. En este sentido, uno de los logros más significativos y espectaculares fueron sus modelos matemáticos para explicar y predecir los fenómenos celestes relacionados con los movimientos aparentes de las estrellas y los planetas.

Entre el siglo IV a.C. y el siglo II, desde Platón a Ptolomeo, los griegos propusieron diversos modelos geométricos, algunos muy sofisticados, capaces de dar explicaciones de fenómenos astronómicos. Algunos de estos modelos permiten mostrar cómo la geometría es una potente herramienta que ayuda a comprender y predecir fenómenos astronómicos. En las JAEM celebradas en Girona en 2009, ya presentamos otro proyecto relacionado con las matemáticas griegas, en aquel caso relacionado con la trigonometría [2] y en particular relacionado con Aristarco de Samos [3].

Planteamos aquí una propuesta didáctica consistente en exponer primero los movimientos aparentes de los astros (las apariencias) para mostrar después en orden cronológico, tal como tuvo lugar históricamente, diversos modelos geométricos que permitieron a los griegos explicar aquellos movimientos¹. Se trata de conseguir que los estudiantes comprendan tanto el contexto como el alcance de las explicaciones conseguidas gracias a la geometría.

2. Algunos datos astronómicos: las apariencias

Para entender la genialidad de las propuestas geométricas griegas conviene que los alumnos se sitúen en el contexto de los conocimientos que tenían los antiguos astrónomos griegos hacia principios del siglo IV a.C., Este conocimiento es similar al que puede tener un observador actual sistemático que observe el cielo a simple vista en nuestras latitudes, de manera que ello permitirá adicionalmente que los estudiantes tengan también unas nociones de astronomía observacional. Los datos suministrados se darán adecuándolos a la época histórica a la que nos referimos, ello bastará para mostrar la idea básica de la utilidad de la geometría y no añadirán dificultades adicionales.

Conviene remarcar el hecho de que hemos de intentar desprendernos de los conocimientos que tenemos actualmente e intentar solamente “describir” las apariencias, es decir, las observaciones de los movimientos aparentes de los astros sin añadir interpretaciones actuales de cara a comprender el valor de las aportaciones griegas.

Para organizar la descripción de dichos fenómenos distinguiremos entre lo que denominaremos, como hizo Hanson “los dos grandes hechos de los cielos” [4]. El primer gran hecho se refiere al movimiento diurno del Sol y al movimiento de las estrellas. El segundo gran hecho es el del movimiento de los planetas (entendidos en su significado original)

Indicamos a continuación los datos principales de que dispusieron los astrónomos de la antigüedad del hemisferio norte y latitudes medias (digamos las del Mediterráneo) y, en particular los griegos a principios del siglo IV a.C..[5].

Movimiento diurno del Sol

Observaciones locales sistemáticas del movimiento diurno del Sol con la ayuda del gnomon (varilla vertical sobre una superficie horizontal) muestran que la longitud y la dirección de la sombra del gnomon varían simultáneamente, de forma lenta, y continuada, en el transcurso del día y determinan, así, el movimiento aparente del sol. Indicaremos también definiciones que podemos asociar de forma natural a las observaciones descritas y que facilitan posteriormente el lenguaje y el manejo de los datos.

Observaciones básicas efectuadas

Ob-1. El desplazamiento de la sombra del gnomon durante el día describe una figura simétrica en forma de abanico.

Ob-2. La forma del abanico cambia todos los días, pero en el momento del día en el que la sombra del gnomon es más corta, ésta siempre está orientada en la misma dirección.

Definiciones relacionadas de forma natural con las observaciones

Def-1. *Norte*: dirección que señala, diariamente, la sombra más corta del gnomon. Usaremos el término habitual de dirección aunque, de hecho, hemos de entender el sentido "de la base del gnomon al extremo de su sombra" sobre la dirección (recta) donde se sitúa la sombra mencionada.

Def-2. *Mediodía del lugar*: instante del día en que la sombra del gnomon es la de longitud menor.

Def-3. *Día solar*: intervalo de tiempo que separa, en un lugar determinado, dos mediodías consecutivos.

Def-4. *Sur, este y oeste*: direcciones definidas de la forma habitual a partir del norte. Es decir, sobre la recta que contiene la sombra del gnomon al mediodía del lugar, entendemos por dirección *sur* el "sentido" contrario a la dirección (sentido) *norte*. Las direcciones *este* y *oeste* se definen análogamente sobre la recta perpendicular a la anterior por la base del gnomon (o del observador hipotético), de forma que la dirección (sentido) *este* sea "hacia la derecha" de un observador que "mire en dirección norte"-y, por tanto, la dirección (sentido) *oeste* será hacia su izquierda.

Def-5. *Puntos cardinales*, norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O): puntos sobre el horizonte del observador según las direcciones de igual nombre.

Def-6. *Zenit del Sol*: posición (o dirección) del Sol a mediodía.

Observaciones básicas efectuadas

Ob-3. El Sol sale siempre por alguna parte situada en torno al este y se pone por alguna parte situada hacia el oeste.

Ob-4. La posición del Sol saliente sobre la línea del horizonte varía de un día a otro, y se desplaza paulatina y cíclicamente desde el este hacia un punto situado más hacia el sur desde donde retorna hacia el este y continúa hacia el norte hasta un punto a partir del cual cambia de sentido para ir de nuevo hacia el este y repetir el ciclo mencionado.

Ob-5. La posición del Sol poniente varía de forma análoga en torno al punto oeste, de forma que cuando el Sol sale por el este, se pone por el oeste. Si sale más hacia el sur o el norte de este, también se pone más hacia el sur o al norte, respectivamente, del oeste.

Definiciones o conceptos relacionados con las observaciones

Def-7. *Solsticio de invierno*: día en que el Sol sale y se pone más al sur de los puntos cardinales Este y Oeste, respectivamente.

Def-8. *Equinoccio de primavera*: día en que, por primera vez después del solsticio de invierno, el Sol sale por el punto cardinal este y se pone por el punto cardinal oeste.

Def-9. *Solsticio de verano*: día en que el Sol sale y se pone más al norte de los puntos cardinales Este y Oeste, respectivamente.

Def-10. *Equinoccio de otoño*: día en que, por primera vez después del solsticio de verano, el Sol sale por el punto cardinal este y se pone por el punto cardinal oeste.

Def-11. *Año*: intervalo de tiempo que separa dos equinoccios de primavera consecutivos.

Observaciones básicas efectuadas

Ob-6. La longitud (¡no la dirección!) de la sombra del gnomon al mediodía varía de un día a otro.

Ob-7. El intervalo de tiempo de luz también varía de un día a otro.

Ob-8. El solsticio de invierno es el día en el que el intervalo de tiempo de luz es el más corto del año y la sombra del gnomon al mediodía es la más larga del año.

Ob-9. El solsticio de verano es el día en el que el intervalo de tiempo de luz es el más largo del año y la sombra del gnomon al mediodía es la más corta del año.

Ob-10. El día y la noche tienen la misma duración los días de los equinoccios.

Ob-11. Las variaciones de la posición del Sol naciente (y ponente) sobre la línea del horizonte corresponden con el ciclo de las estaciones.

Ob-12. El número de días del verano es más largo que el número de días del invierno.

Podemos resumir el movimiento diurno del Sol señalando las dos observaciones fundamentales ligadas a su movimiento aparente: El Sol: atraviesa el cielo una vez cada 24 horas y cambia su elevación con las estaciones.

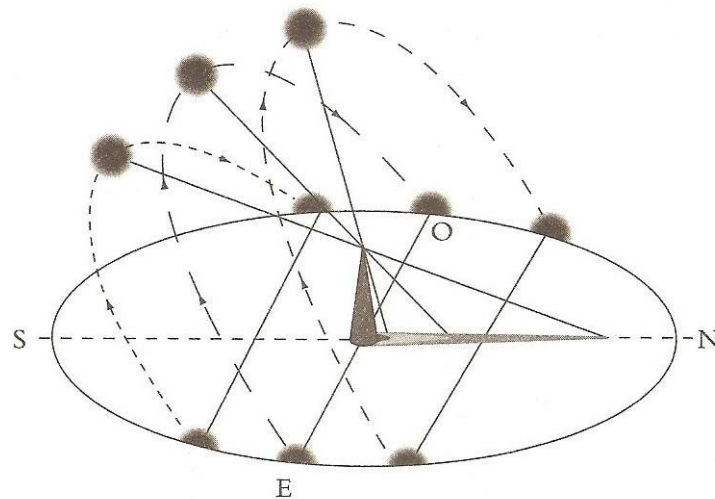


Figura 1. Movimiento aparente del Sol con ayuda de un gnomon.

Movimiento de las estrellas

Recordemos que las observaciones se refieren al hemisferio norte y latitudes medias, es decir, que corresponden al área donde se llevaron a cabo las observaciones astronómicas a las que nos referimos.

Observaciones básicas efectuadas y definiciones que se relacionan

Ob-13. La distancia angular entre cualquier par de estrellas permanece siempre constante, de modo que las posiciones relativas entre estrellas son invariantes.

Def-12. *Constelaciones*: agrupaciones (arbitrarias) de estrellas vecinas.

Ob-14. Las estrellas se mueven globalmente de este a oeste (en sentido antihorario si miramos hacia el norte y en sentido horario si miramos hacia el sur). Entenderemos este y oeste en sentido amplio, es decir, como dos regiones: una que contiene el horizonte SEN y la otra, el horizonte NOS, respectivamente.

Def-13. *Movimiento diurno* (o movimiento diario o rotación diurna): movimiento efectuado por las estrellas en dirección este-oeste, es decir, hacia el oeste.

Ob-15. En el entorno de unos 45° por encima del horizonte en dirección norte (en latitudes medias) hay un punto respecto del cual las estrellas próximas parecen describir durante la noche arcos de circunferencias. Aproximadamente una semicircunferencia las noches de los equinoccios.

Def-14. *Polo norte celeste (P)*: punto en torno al cual parecen girar las estrellas. Es un punto muy cercano a la estrella Polar y con la que se puede identificar (hoy en día se encuentra a menos de un grado).

Ob-16. Las estrellas tales que su distancia angular respecto del polo norte celeste es menor o igual que la distancia entre éste y el punto cardinal norte sobre el horizonte (N), nunca

desaparecen por debajo del horizonte. Son, por tanto, estrellas visibles cualquier noche a cualquier hora (noche de buena visibilidad).

Def-17. *Estrellas circumpolares*: estrellas cuya distancia angular al polo norte celeste es menor o igual que la distancia entre éste y el punto cardinal norte sobre el horizonte.

Def-16. *Círculo diurno*: circunferencia descrita, aparentemente, por una estrella durante su movimiento diurno. Hemos mantenido, sin embargo, el nombre tradicional de círculo. Cuanto más alejada está una estrella del polo norte celeste más difícil se hace reconocer la parte visible de su recorrido como un arco de circunferencia.

Ob-17, Las estrellas describen círculos diurnos completos (retornan a la misma posición) cada 23 horas 56 minutos, aproximadamente. Nótese que hay una cierta interpretación en esta afirmación dado que, como es obvio, en las latitudes indicadas no podemos "ver" permanentemente una estrella durante 23 horas 56 minutos.

Def-17. *Día sidéreo*: tiempo que tarda una estrella en pasar por dos posiciones consecutivas idénticas. El día sidéreo es más corto que el día solar, aproximadamente 4 minutos.

Ob-18, Una estrella que sale exactamente por el este sigue un recorrido aparente casi idéntico al del Sol en los equinoccios.

Def-18. *Ecuador celeste*: círculo diurno descrito por una estrella que sale por el este y se pone por el oeste.

Ob-19. Cerca del punto sobre el horizonte en dirección sur (punto cardinal sur), las estrellas no se elevan demasiado y se esconden poco después de haber salido.

Las características anteriores, que corresponden a observaciones locales realizadas en latitudes medias del hemisferio norte, se pueden perfilar mediante la descripción de diferencias significativas que se producen en la observación del cielo nocturno cuando nos desplazamos del lugar de observación en dirección sur. Si lo hacemos, como lo hicieron los griegos, podemos añadir a las observaciones anteriores, las siguientes:

Ob-20. La altitud del polo norte celeste decrece a razón de 1° cada 110 km, aproximadamente.

Ob-21. Ciertas estrellas que antes eran circumpolares ahora dejan de serlo,

Ob-22. Las estrellas que antes salían por el punto cardinal este y se ponían por el oeste lo siguen haciendo, pero describiendo una trayectoria cada vez más perpendicular al plano del horizonte.

Ob-23. Cada vez se ven más estrellas que antes no era posible ver.

Ob-24. Las estrellas que se elevaban muy poco y se escondían poco después de haber salido - cerca del punto cardinal sur-, se observa que ahora se elevan a mayores altitudes y son visibles durante más tiempo.

Podemos resumir las características principales del movimiento nocturno de las estrellas indicando que: las estrellas: tienen un movimiento diurno de este a oeste y describen regularmente círculos diurnos en torno al polo norte celeste en 23 horas 56 minutos.

La figura siguiente pretende ilustrar y ayudar a comprender algunas de las observaciones indicadas sobre el movimiento estelar.

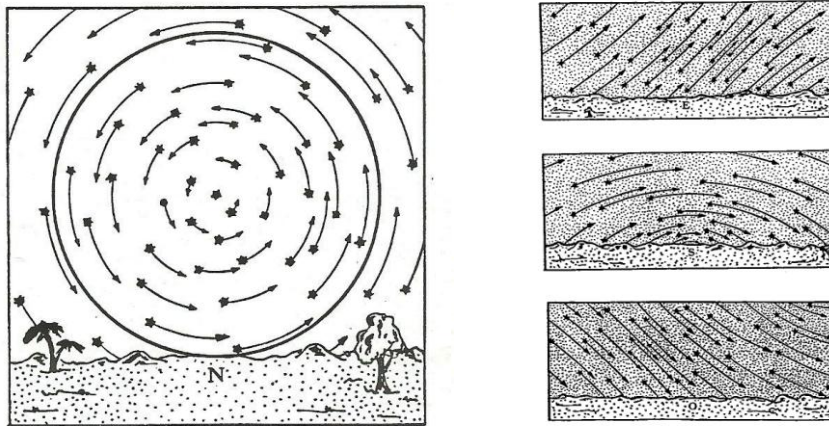


Figura 2. Estrellas circumpolares (izquierda) y movimiento estelar aparente según la dirección de observación sea el Este, el Sur o el Oeste (derecha).

Movimiento de los planetas

Teniendo en cuenta que las posiciones relativas entre las estrellas no varían, se puede llegar a establecer sus localizaciones en un mapa estelar. La observación sistemática muestra, entonces, que existen algunas “anomalías” en relación con el movimiento regular de los cielos que acabamos de mencionar. Estas anomalías constituyen el segundo hecho de los cielos.

Observaciones y definiciones asociadas

Ob-25. Cuando observamos a simple vista hay siete cuerpos celestes que no permanecen en posiciones fijas respecto de las estrellas, es decir, que con el tiempo varían su distancia angular respecto de las estrellas vecinas.

Def-19. *Planetas*: cuerpos celestes que no permanecen en posiciones fijas respecto de las estrellas. Según esta definición son: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno.

El Sol

Observaciones y definiciones asociadas

Ob-26. El fondo estelar inmediatamente anterior a la salida del Sol, o inmediatamente posterior a la puesta, varía día a día.

Ob-27. La posición del Sol referida al fondo estelar varía, aproximadamente, 1° hacia el este en relación con la posición que ocupaba el día anterior.

Ob-28. El Sol tarda un año en volver al mismo punto del fondo estelar.

Def-20. *Eclíptica*: trayectoria aparente del Sol en relación con el fondo estelar.

Ob-29. La eclíptica atraviesa un conjunto de doce constelaciones que, en dirección este, son: Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis. Es una trayectoria regular que se cierra sobre sí misma al cabo de un año.

Def-21. *Zodiaco*: franja de unos 16° de ancho alrededor de la eclíptica que contiene las doce constelaciones mencionadas.

Ob-30. La eclíptica se aleja respecto del ecuador celeste hasta $23,5^\circ$, aproximadamente.

Ob-31. La velocidad aparente del Sol a través de la eclíptica es superior en invierno que en verano.

El resto de los planetas tienen unas características generales similares a las del Sol, así los siete planetas presentan: un movimiento diurno hacia el oeste acompañando a las estrellas; un desplazamiento lento hacia el este a través de las estrellas hasta que retornan, aproximadamente, a su posición inicial y un movimiento que se mantiene próximo a la eclíptica (raramente abandonan la franja del zodiaco).

Veamos, ahora, las características particulares de cada uno de los otros planetas.

La Luna

Observaciones y definiciones asociadas

Ob-32. El tamaño aparente de la Luna es semejante al del Sol (ambos presentan un diámetro angular de medio grado, aproximadamente).

Ob-33. El recorrido de la Luna a través del zodíaco, en dirección este, es más rápido y menos regular que el del Sol.

Ob-34. La Luna tarda un promedio de 27 días y un tercio (27,32 días) en hacer un recorrido completo a través del zodíaco.

Def-22. *Período sidéreo medio*: promedio de tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa en su movimiento a través de la banda del zodíaco.

Def-23. *Mes sidéreo*: intervalo de tiempo que tarda la Luna en retroceder (en su movimiento hacia el este) desde una cierta posición respecto del fondo estelar hasta llegar de nuevo a la misma otra vez.

Ob-35. El tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta completa a través del zodíaco puede llegar a diferir en 7 horas de la media de tiempo estimada.

Ob-36. El aspecto del disco lunar varía notablemente a lo largo del tiempo.

Def-24. *Fases de la Luna*: cambios de la forma aparente del disco lunar. También se llama fase de la Luna la forma aparente que presenta su contorno visible.

Def-25. *Luna nueva*: fase de la Luna en la que el disco lunar es totalmente invisible.

Def-26. *Cuarto creciente*: fase de la Luna, que se da aproximadamente una semana después de la Luna nueva, cuando la parte visible del disco lunar presenta la apariencia de un semicírculo en forma de D.

Def-27. *Luna llena*: fase de la Luna en la que el disco lunar es totalmente visible.

Def-28. *Cuarto menguante*: fase de la Luna, que se da una semana después de la Luna llena, aproximadamente, en la que la parte visible del disco lunar presenta la apariencia de un semicírculo en forma de C.

Ob-37. La Luna pasa progresivamente por las siguientes fases: Luna nueva, Cuarto creciente, Luna llena, Cuarto menguante y regresa a la fase de Luna nueva. Este ciclo se repite constantemente. El período de tiempo entre cada una de las fases mencionadas y la siguiente es de cerca de una semana.

Def-29. *Lunación*: ciclo que corresponde al intervalo de tiempo entre dos Lunas nuevas consecutivas.

Ob-38. Una lunación dura una media de tiempo de 29 días y medio (29,53 días).

Def-30. *Período sinódico medio de la Luna*: promedio de tiempo transcurrido entre dos lunas nuevas consecutivas.

Def-31. *Mes sinódico*: intervalo de tiempo entre dos lunas nuevas consecutivas.

Ob-39. El tiempo que tarda la Luna en realizar una lunación puede llegar a diferir en medio día de la media de tiempo estimada.

Ob-40. Las sucesivas posiciones de la Luna nueva respecto del fondo estelar se sitúan cada vez más hacia el este.

Ob-41. La trayectoria de la Luna se aleja de la eclíptica hasta una separación angular de unos 5° ($5,2^\circ$).

Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno

Estos cinco planetas, a diferencia del Sol y la Luna, se muestran como simples puntos luminosos en el cielo.

Observaciones y definiciones asociadas

Ob-42. El período sidéreo medio de Mercurio es de 1 año.

Ob-43. El período sidéreo medio de Venus es de 1 año.

Ob-44. El período sidéreo medio de Marte es de 687 días.

Ob-45. El período sidéreo medio de Júpiter es de 12 años.

Ob-46. El período sidéreo medio de Saturno es de 29 años y medio.

Ob-47. Los períodos sidéreos reales pueden diferir de los valores anteriores en todos los casos.

Def-32. *Movimiento normal o propio*: movimiento de los planetas en dirección este.

Ob-48. Ninguno de los cinco planetas mencionados tiene una velocidad uniforme en su movimiento propio hacia el este.

Ob-49. Durante ciertos intervalos de tiempo cada uno de estos cinco planetas va perdiendo velocidad en su movimiento propio hasta que se para, invierte el sentido de marcha retrocediendo hacia el oeste hasta que, de nuevo, se detiene y vuelve a su movimiento normal.

Def-33. *Retrogradación*: interrupción periódica del movimiento normal de un planeta ocasionado por el hecho de que durante ciertos intervalos de tiempo parece retroceder hacia el oeste. (la trayectoria aparente de un planeta cuando retrocede respecto de su movimiento propio tiene la forma de una especie de bucle o rizo).

Ob-50. Mercurio invierte el sentido de su movimiento normal cada 116 días en promedio.

Ob-51. Venus invierte el sentido de su movimiento normal cada 584 días en promedio.

Ob-52. Marte invierte el sentido de su movimiento normal cada 780 días. en promedio

Ob-53. Júpiter invierte el sentido de su movimiento normal cada 399 días en promedio.

Ob-54. Saturno invierte el sentido de su movimiento normal cada 378 días en promedio.

Def-34. *Período sinódico medio de un planeta*: promedio de tiempo entre dos retrogradaciones consecutivas del planeta durante su movimiento normal.

Ob-55. Mercurio y Venus nunca se alejan demasiado del Sol y restringen su movimiento a los alrededores de este planeta.

Ob-56. Marte, Júpiter y Saturno no restringen su movimiento a los alrededores de la región celeste donde se encuentra el Sol

Def-35. *Planetas inferiores*: planetas que restringen su movimiento alrededor de una región del cielo cercana al Sol (Mercurio y Venus).

Def-36. *Planetas superiores*: planetas que no restringen su movimiento a una región del cielo cercana al Sol (Marte, Júpiter y Saturno).

Def-37. *Elongación de un planeta*: distancia angular entre el planeta y el Sol.

Ob-57. La elongación máxima de Mercurio es de 28° , aproximadamente.

Ob-58. La elongación máxima de Venus es de unos 46° , aproximadamente.

Ob-59. Los planetas inferiores efectúan un lento vaivén alrededor del Sol.

Ob-60. Situados al este del Sol, los planetas inferiores se muestran como estrellas vespertinas.

Ob-61. Situados al oeste del Sol, los planetas inferiores se muestran como estrellas matutinas.

Ob-62. En las proximidades del Sol los planetas no son visibles.

Def-38. *Conjunción*: posición de un planeta en la que el planeta se encuentra sobre la misma dirección de la recta que une la Tierra y el Sol, con ésta en un extremo, es decir, cuando la distancia angular entre el Sol y el planeta es nula (0°).

Def-39. *Oposición*: posición de un planeta en la que el planeta se encuentra sobre la misma dirección de la recta que une la Tierra y el Sol, con ésta entre ambos, es decir, cuando la distancia angular entre el Sol y el planeta es de 180° .

Ob-63. En el momento de producirse una retrogradación, se observa un incremento de luminosidad en los planetas.

Ob-64. Los planetas superiores sólo retrogradan cuando se encuentran en oposición al Sol. Podemos resumir el movimiento aparente de los planetas de la siguiente manera:

Los planetas: cada noche se encuentran un poco más hacia el este en relación con el fondo zodiacal. Salvo del Sol y la Luna, el resto interrumpen periódicamente su movimiento normal para efectuar retrogradaciones

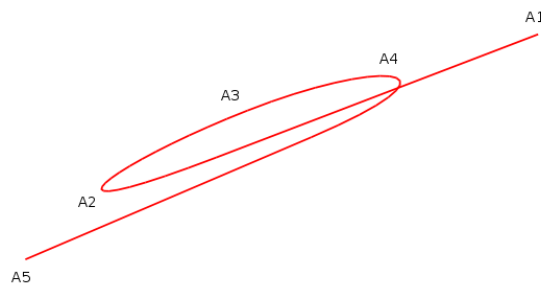


Figura 3. Posiciones sucesivas en dirección este de A1 a A5 durante una retrogradación.

3. El modelo geométrico del *universo de las dos esferas*

Los antiguos griegos pudieron explicar con una asombrosa sencillez el primer hecho de los cielos mediante lo que hoy denominamos el *universo de las dos esferas* y que, a partir del siglo IV a.C., fue aceptado por la mayoría de los filósofos griegos [6]. Se trata de un simple modelo geométrico que consiste en suponer que la Tierra es una esfera inmóvil situada en el centro de otra esfera mucho mayor, la esfera celeste o esfera estelar. Esta última gira hacia el Oeste describiendo una revolución completa cada día sidéreo (23h 56 min) en torno de un eje fijo que pasa por el Polo norte celeste, arrastrando en su movimiento las estrellas que se suponen fijas sobre dicha esfera.

Además, se considera que el Sol describe en un año, y en dirección este, la circunferencia de un círculo máximo (que representa la eclíptica) sobre la esfera estelar. Este círculo está inclinado $23,5^\circ$ respecto del ecuador de la esfera celeste (ecuador celeste). De hecho serían $23^\circ 27'$ pero ya hemos dicho que nos basamos en los datos aproximados de la época considerada.

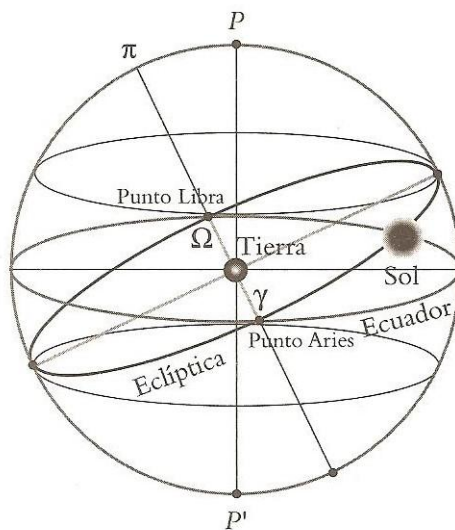


Figura 4. El Universo de las dos esferas

Con este modelo y las premisas indicadas, podemos explicar el movimiento aparente de las estrellas y el movimiento aparente del Sol. Basta fijar la posición del Sol sobre la eclíptica un día determinado y ese día el Sol describirá un círculo paralelo al ecuador celeste. Se explica así el primer hecho de los cielos y el modelo tiene capacidad predictiva. Los griegos podían predecir cómo se verían las posiciones y movimientos tanto de las estrellas como del Sol si alguien se desplazaba por la esfera terrestre. Sabían cómo se observaría el movimiento aparente del Sol en el polo norte de la Tierra (aunque ellos nunca fueron, ¡claro!), y cómo se observaría en el ecuador de la Tierra. Análogamente, podían prever posiciones estelares de las estrellas que conocían para cualquier posición del observador y para cualquier momento del año.

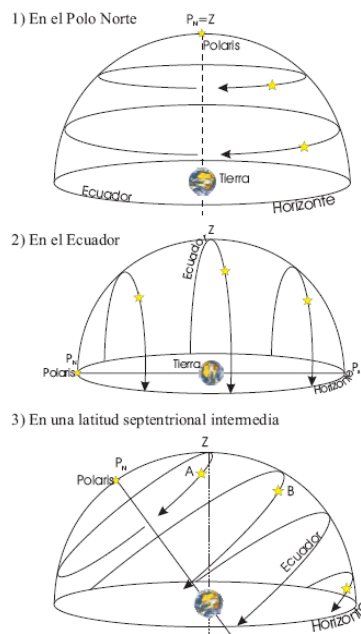


Figura 5. Movimiento del Sol visto desde el polo norte, desde el ecuador y desde una latitud septentrional intermedia. Fuente: http://www.elcielodelmes.com/Curso_iniciacion/curso_1.php

Los antiguos griegos establecieron este modelo bajo la suposición de un Cosmos geocéntrico y geostático; además, esgrimieron poderosos argumentos para defender la realidad del universo de las dos esferas. Sin embargo, este modelo del universo de las dos esferas no es algo que pertenezca al pasado sino que es una poderosa herramienta que se sigue utilizando hoy en día para explicar astronomía observacional, por su simplicidad y utilidad para determinar las posiciones estelares. Hay que tener en cuenta que las coordenadas para visualizar los astros son angulares (no dependen de la distancia a la que se encuentren de la Tierra) y por ello podemos suponer que están sobre una esfera [7].

4. El modelo de las *esferas homocéntricas* de Eudoxo de Cnido

El Universo de las dos esferas fue un marco de referencia ampliamente aceptado pero que no daba explicación del movimiento aparente de todos los cuerpos celestes, en particular no explicaba el movimiento de los planetas.

Se atribuye a Platón (427 aC-347 a.C.) el haber planteado a los eruditos de su época la siguiente pregunta: ¿cuáles son los movimientos uniformes y ordenados cuya suposición permite *salvar los fenómenos* (expresión griega que equivaldría a: *explicar racionalmente las apariencias*) relacionados con los movimientos de los planetas? Platón convencido de que el cosmos se estructuraba según una geometría perfecta había establecido el principio básico de la circularidad y uniformidad; según él todos los cuerpos celestes se mueven con movimiento circular y uniforme [8].

Fue el matemático Eudoxo de Cnido (408-355 a.C. aprox.) quien respondió seriamente a la supuesta pregunta de Platón. Propuso lo que conocemos como el sistema de esferas homocéntricas, un ingenioso sistema de esferas concéntricas mediante el cual conseguía ofrecer una primera y genial explicación del movimiento de los planetas a base de movimientos circulares.

En su *sistema de las esferas homocéntricas*, Eudoxo consideró para cada planeta un modelo con un cierto número de esferas encajadas, concéntricas con la Tierra y situaba el planeta en el ecuador de la esfera más interna. En el caso, por ejemplo, del planeta Saturno suponía un conjunto de cuatro esferas.

El planeta está situado en el ecuador de una esfera (esfera 4). El eje de esta esfera se fija por los polos a otra esfera (esfera 3) concéntrica con esa y más grande. El eje de la esfera 3, a su vez, tiene los polos solidarios con otra esfera (esfera 2) mayor y concéntrica con las anteriores. Finalmente, y de forma análoga, el eje de la esfera 2 tiene los polos solidarios con una última esfera (esfera 1) más grande y concéntrica con las anteriores.

De esta manera el eje de cada esfera (y, por tanto, cada par de polos) se ve obligado a desplazarse por el movimiento de la esfera más cercana que le rodea. Todas las esferas giran con velocidades constantes, y respectivamente diferentes, en torno a su propio eje.

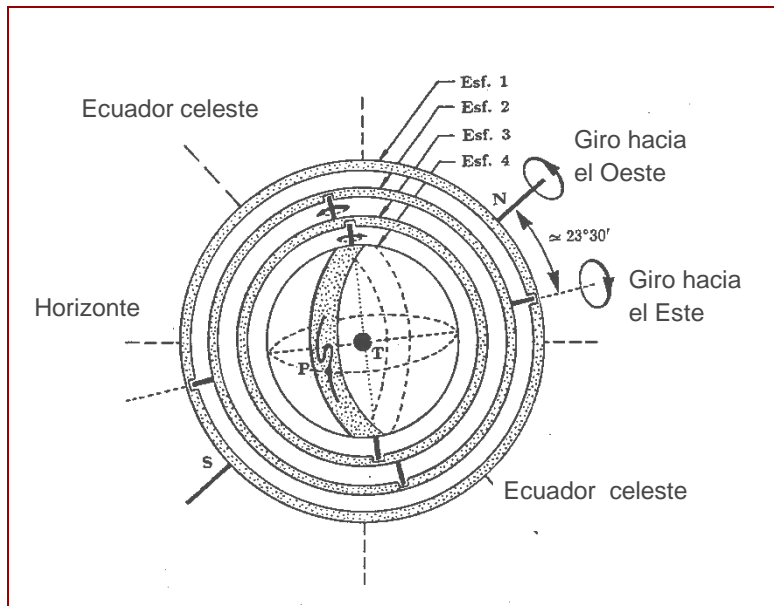


Figura 6. Modelo básico del sistema de Eudoxo de las esferas homocéntricas.

Cada una de las esferas presenta características particulares:

La esfera 1: tiene el eje en la dirección del polo norte celeste y gira diariamente de este a oeste. Explica el movimiento diario del planeta, acompañando a las estrellas. Esta esfera corresponde a la esfera de las estrellas y es la esfera que mueve todas las demás.

La esfera 2: tiene su eje inclinado respecto al de la anterior un ángulo casi igual al que forma la eclíptica con el ecuador celeste y gira hacia el este con una velocidad igual al período sidéreo medio correspondiente al planeta. Explica el movimiento normal o propio (en dirección este) del planeta.

La esfera 3: tiene el eje (los polos) sobre el ecuador de la anterior (es decir sobre la banda zodiacal) y gira con una velocidad igual a una revolución cada período sinódico (tiempo entre dos retrogradaciones consecutivas).

La esfera 4: tiene el eje inclinado un cierto ángulo (pequeño) respecto al eje de la anterior y gira con la misma velocidad que la esfera 3, pero en sentido opuesto.

El movimiento combinado de la esfera 3 y la esfera 4, visto desde el centro de las esferas (la Tierra) obliga a que el planeta describa una curva en forma de ocho que los griegos llamaron *hippede* [9] y que corresponde a una lemniscata esférica (una curva en forma de ∞ sobre una esfera).

Tal vez podemos recordar que la lemniscata plana corresponde a la curva que en la notación actual puede ser descrita a través de la ecuación general:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

siendo $2a$ la distancia entre los focos F_1 y F_2 .

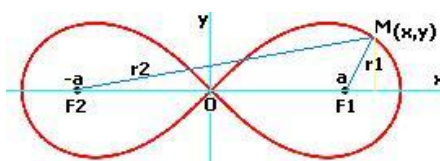


Figura 7. Lemniscata plana.

Volviendo a Eudoxo, las esferas 3 y 4 imparten un movimiento zodiacal hacia arriba, hacia abajo, hacia adelante y hacia atrás a lo largo de la lemniscata esférica. Pero como el planeta se

ve obligado además a desplazarse a causa de la esfera 2 (movimiento lento hacia el este) y la esfera 1 (movimiento hacia el oeste) el resultado es que el planeta efectúa una retrogradación.

Como resultado de la composición de movimientos de las cuatro esferas, el planeta presenta: un movimiento diario hacia el oeste alrededor de la Tierra acompañando las estrellas; un movimiento propio hacia el este a lo largo del zodíaco y un movimiento de retrogradación.

Más tarde, Aristóteles (384-322 a.C.) integró en su visión del mundo, es decir en su cosmología, el mecanismo de las esferas homocéntricas que, después de Eudoxo, había perfeccionado Calipo de Cízico (370-300 a.C.) [10]. Pero a diferencia de los dos anteriores, no postuló un conjunto particular de esferas homocéntricas para cada planeta sino que quiso dar sentido mecánico y realidad física al conjunto. Así, construyó un sistema único de esferas homocéntricas que actuaban simultáneamente conectadas todas entre sí [11].

En el modelo aristotélico, la esfera más externa (la esfera estelar) imponía el movimiento hacia el oeste a todas las demás. Para impedir que una esfera asociada con un planeta determinado impusiera su particular movimiento a todas las esferas inferiores, introdujo, entre el conjunto de esferas de cada planeta y el del planeta siguiente (más interno), esferas que giraban sobre los mismos ejes y con las mismas velocidades que cada una de las esferas planetarias del conjunto anterior (más externo) pero en dirección opuesta, estas esferas anulaban así los movimientos que en caso contrario se habrían impuesto a las más internas. La introducción de este conjunto de esferas antigiratorias elevó el número total de esferas implicadas, esferas que ahora estaban en contacto físico y formaban un sistema mecánico global.

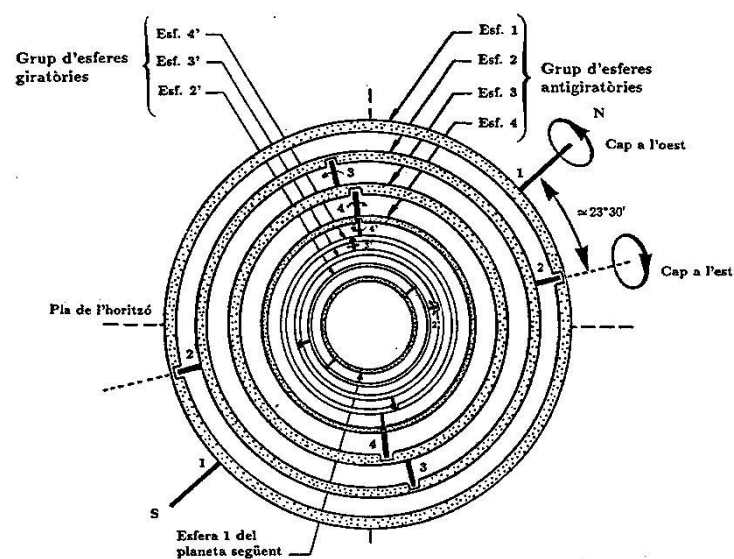


Figura 8. Esferas giratoria y esferas compensadoras o antigiratorias de Aristóteles.

5. El modelo del círculo excéntrico y el modelo epiciclo-deferente

En la época helenística, cuando Alejandría se convirtió en el centro cultural y científico más importante de la Antigüedad, los astrónomos idearon nuevos modelos matemáticos para explicar algunas apariencias que no habían quedado aún resueltas. En el siglo II antes de nuestra era, Hiparco de Nicea (c.a. 190 -120 a.C.), uno de los astrónomos griegos más destacados consiguió, entre otros muchos logros, explicar la *anomalía zodiacal*, el hecho que el movimiento aparente del Sol por la eclíptica no se efectúa con velocidad constante a lo largo del año (ocurre algo similar en el caso de los planetas a lo largo del correspondiente período sidéreo ya que recorren arcos iguales en tiempos desiguales). En el caso del Sol, usó el modelo de excéntrica o de círculo excéntrico.

Para simplificar diremos que el modelo usado por Hiparco consistió en considerar la Tierra (T) inmóvil y situar el planeta (P), en este caso el Sol, en una órbita circular excéntrica -es decir, sobre un círculo de centro (C) no coincidente con la Tierra. Suponiendo que el planeta se mueve con movimiento circular uniforme (velocidad angular constante, w) respecto de C, entonces, visto desde la Tierra (T), su velocidad angular aparente es mayor en el punto P de la órbita más cercano a la Tierra (perigeo) y es menor en el punto A más alejado (apogeo), tal como se puede deducir fácilmente de la figura 9.

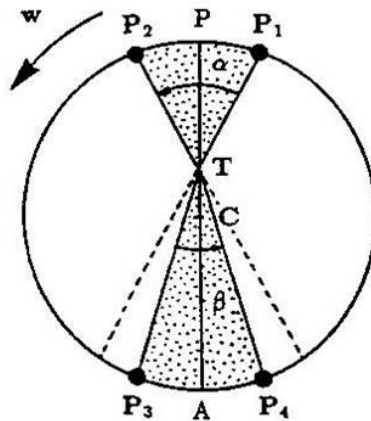


Figura 9. El círculo excéntrico permite explicar la anomalía zodiacal del movimiento aparente del Sol.

Esta técnica permite explicar en una primera aproximación, por ejemplo, el movimiento aparente del Sol a través de la eclíptica [12] y, en general, el hecho de que los planetas recorren arcos iguales en tiempos desiguales.

Por otro lado, mediante un sistema de esferas homocéntricas resultaba difícil de explicar el cambio de luminosidad de los planetas durante las retrogradaciones. Ya en la época griega, la variación del brillo de los planetas se relacionó con una aproximación de los mismos a la Tierra. Ahora bien, si el planeta se encuentra en una esfera de centro la Tierra, como pasa en el caso de un sistema de esferas homocéntricas, la distancia de la Tierra al planeta permanece siempre constante.

La introducción del modelo epiciclo- deferente solucionó este problema. El matemático y astrónomo Claudio Ptolomeo (c.a. 100-170), escribió la obra culminante de la astronomía griega, la *Sintaxis matemática*, más conocida posteriormente como el *Almagesto*, donde usó diferentes artificios geométricos, entre ellos el sistema epiciclo-deferente.

Este modelo geométrico consiste en considerar que el planeta (P) se mueve en círculo alrededor de un centro (C) que, a su vez, también se mueve describiendo otro círculo cuyo centro es la Tierra (T) (puede que este centro no esté situado necesariamente sobre la Tierra, pero debe ser estacionario respecto de la Tierra inmóvil). El círculo interior se llama deferente y el que lleva el planeta, epiciclo. Este modelo, de una gran simplicidad, posee al mismo tiempo una enorme versatilidad, lo que le hace muy poderoso como herramienta geométrica capaz de aproximar trayectorias planetarias.

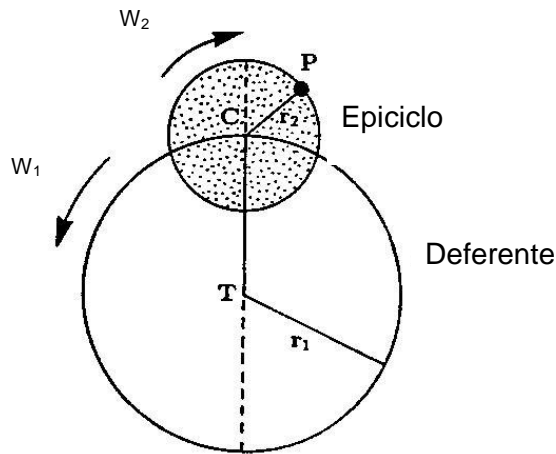


Figura 10. Modelo de epiciclo-deferente.

En un sistema epiciclo-deferente podemos variar arbitrariamente los valores de los parámetros siguientes: w_1 : la velocidad angular del deferente; w_2 : la velocidad angular del epiciclo; r_1 : el radio del deferente y r_2 : el radio del epiciclo.

Supongamos que representamos el sentido del movimiento hacia el este (movimiento propio de los planetas) mediante el sentido antihorario, entonces, convendremos que el sentido de w_1 sea siempre hacia el este, entonces, a w_2 , le podremos atribuir bien el sentido horario o el antihorario.

El sistema epiciclo-deferente permite explicar las retrogradaciones y la variación de luminosidad de los planetas, interpretada ésta como una variación de la proximidad del planeta a la Tierra. La figura siguiente muestra cómo esto es posible mediante un caso ideal en el que la velocidad angular del centro del epiciclo C respecto de la Tierra sea el triple de la velocidad angular del planeta P respecto de C , es decir, $w_2 = 3w_1$, un caso que se aproxima bastante al modelo que correspondería al planeta Mercurio. Visto desde la Tierra el planeta efectuaría tres bucles y se aproximaría a la Tierra justamente en los momentos en que retrograda y brilla más.

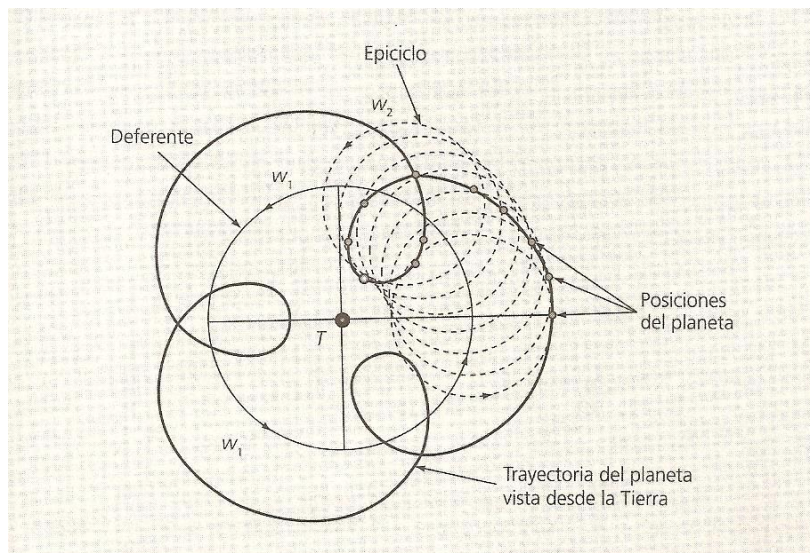


Figura 11. Explicación del cambio de luminosidad de un planeta mediante el modelo epiciclo-deferente.

6. Consideraciones finales

Los antiguos astrónomos y matemáticos griegos propusieron modelos geométricos imaginativos para explicar los movimientos aparentes de los astros visibles a simple vista. El conocimiento de algunos de estos modelos y del contexto en el que aparecieron puede utilizarse como una herramienta didáctica que muestre la utilidad que tiene la matemática y en particular la geometría. Por otro lado, la utilización de este recurso histórico favorece una presentación interdisciplinaria de contenidos (matemáticas, astronomía, historia, filosofía,...). Adicionalmente, sirve para reivindicar conocimientos astronómicos básicos que durante siglos ha tenido la humanidad y que han ido dejando de ser un dominio cotidiano en nuestro mundo cada vez más urbano y a menudo muy contaminado lumínicamente que no permite la observación habitual de los fenómenos astronómicos.

Bibliografía:

- [1] Linberg, D.C. (2002) "Los inicios de la ciencia occidental", Paidós, Barcelona.
- [2] Massa, M.R.; Guevara, I.; Puig-Pla, C. i Romero, F. (2009) "Trigonometría para medir los cielos", Actas de las XIV Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, Girona.
- [3] Aristarco de Samos (2007), *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, Introd., trad. y notas, M^a Rosa Massa, Universidad de Cádiz, Cádiz.
- [4] Hanson, N.R. (1978) *Constelaciones y conjeturas*, Alianza Universidad, Madrid.
- [5] Puig Pla, Carles (1996) "El geocentrisme i la física antiga", Edicions UPC, Barcelona.
- [6] Kuhn, T. S., (1996) "La *revolución* copernicana", Barcelona, Ariel, Barcelona.
- [7] Martín Asín, F. (1990) "Astronomía", Paraninfo, Madrid.
- [8] Koestler, A., (2007) "Los sonámbulos. Origen y desarrollo de la cosmología", Librería / Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, México.
- [9] Toomer, G.J. (2000) "Astronomía". En: Brunschwig, J.; Lloyd, G (dirs.) "El Saber Griego", Akal, Madrid, p. 223-229.
- [10] Sambursky, S. (2011) "El mundo físico de los griegos", Alianza, Madrid.
- [11] Heath, T. (1981) "Aristarchus of Samos. The Ancient Copernicus", Oxford, Clarendon Press, Dover, New York.
- [12] Crowe, M. J., (1990) "Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution", Dover, New York.

¹ El trabajo aquí presentado está incluido en el proyecto HAR2013-44643-R.