



## Applets de GeoGebra para las Matemáticas del grado en ADE

Valentina Alacid Cárceles; M. Victoria Caballero Pintado  
email: [alacid@um.es](mailto:alacid@um.es); [mvictori@um.es](mailto:mvictori@um.es)

Dpto. Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Facultad de Economía y Empresa (Universidad de Murcia)

### RESUMEN

Este trabajo describe el desarrollo de un proyecto de innovación educativa de la Universidad de Murcia, que en la convocatoria de este curso nos fue concedido, para la elaboración de material digital, y que está dirigido a los alumnos de las asignaturas de Matemáticas que se imparten en la Facultad de Economía y Empresa. El proyecto finaliza en septiembre con la entrega de una memoria final.

Básicamente el proyecto consiste en la elaboración de aplicaciones interactivas que hemos realizado utilizando el programa GeoGebra, que es software libre a disposición de todos los que queremos aprender y enseñar matemáticas en cualquier nivel educativo. Con estas aplicaciones estamos haciendo un recorrido por los conceptos que se desarrollan en los contenidos de las asignaturas de Matemáticas de los grados de la Facultad de Economía y Empresa y esperamos que les resulten útiles a nuestros alumnos. Además, pretendemos que los alumnos no solo se acerquen a las aplicaciones que hemos realizado para ellos, sino también al programa GeoGebra en sí, por su fácil utilización y sus amplias posibilidades.

*[GeoGebra](#), [aplicaciones interactivas](#), [matemáticas grado ADE](#).*

## Introducción

En este curso, como ha ocurrido en los últimos, la Unidad de Innovación Educativa de la Universidad de Murcia publicó la convocatoria para la producción de material didáctico digital. Nosotras presentamos un proyecto para la producción de materiales dentro de la modalidad A, que tiene por objeto producir materiales docentes relacionados con asignaturas de alguno de los títulos de Grado o Máster.

Estamos elaborando materiales con GeoGebra que recorren los contenidos de las asignaturas de Matemáticas para la Empresa del grado en ADE en particular, y en general, pretendemos que resulten útiles a cualquier alumno que esté cursando asignaturas de Matemáticas en los grados que se imparten en la Facultad de Economía y Empresa.

Los contenidos que elaboremos se publicarán en el portal OCW de la Universidad de Murcia y contamos con la ayuda del Grupo de Apoyo a la Teleenseñanza, que nos han ayudado a solventar algunos problemillas que se han ido presentado.

Para la elaboración de los materiales hemos seguido la guía docente de nuestras asignaturas, cuyos contenidos son la base de algunos de los libros en los que hemos participado (por ejemplo [1]), así como también nos ha ayudado parte del material disponible en la red (como en [2]) y saber que en la actividad docente de otros grados también se ha pensado en la utilización de GeoGebra como herramienta didáctica ([3]). En este trabajo hacemos una descripción del trabajo llevado a cabo hasta el momento en relación a este proyecto de Innovación Educativa.

## Antecedentes

Fue el curso pasado cuando para explicar el tema de introducción a las técnicas de optimización decidimos utilizar GeoGebra, puesto que se trataba de un software libre y sencillo que nos permitía hacer construcciones interactivas y dinámicas, permitiendo la participación activa de los estudiantes cuando eran usadas por ellos. Los desarrolladores del programa habían puesto a disposición de los usuarios un espacio para compartir materiales llamado GeoGebraTube, de modo que pudimos dar a nuestros alumnos direcciones url, donde podían ver los applets que nosotros habíamos hecho y utilizarlos tantas veces como quisieran, cuando estudiaran el tema. La aplicación se completaba con una serie de cuestiones o comentarios que resultaban de mucha utilidad a los estudiantes porque les permitía reflexionar y plantearse cuestiones que responder.

La idea inicial del proyecto era, que en relación con los distintos contenidos de la asignatura de Matemáticas para la Empresa, iríamos elaborando materiales con GeoGebra, que compartiríamos con los alumnos utilizando GeoGebraTube. Cuando empezamos y subimos los primeros materiales para obtener la dirección url que íbamos a compartir, observamos que al cargar los applets elaborados, éstos perdían algunas características importantes. Este fue el motivo por el que decidimos que, de momento, para utilizar nuestros materiales era conveniente que los estudiantes instalaran el programa GeoGebra en sus ordenadores. Aunque inicialmente la instalación del programa solo tenía por objeto la visualización de los applets, les hemos insistido que este programa tiene utilidad por sí mismo, más allá de su uso como medio para trabajar con nuestros applets.

El proyecto fue aprobado a finales del primer cuatrimestre, y empezamos a trabajar en él cuando se inició el segundo cuatrimestre, por lo que comenzamos con los contenidos de Matemáticas para la Empresa II, y son los materiales de esta materia los que en este momento tenemos más avanzados, y que tienen que ser completados con los contenidos de Matemáticas para la Empresa I.

Para incentivar a los alumnos a utilizar estos applets hemos elaborado una serie de pruebas virtuales utilizando la herramienta exámenes del aula virtual de la Universidad de Murcia (UMU), premiándolos si hacen al menos la mitad de la prueba bien y que no los penaliza si no la hacen o no hacen al menos la mitad de la prueba. Se trata de obtener una nota complementaria, que solo les favorece y les beneficia.

Al final del cuatrimestre queremos valorar la utilización de estos materiales, pero todavía no hemos pensado cómo. Creemos que solo teniendo en cuenta los alumnos que han realizado las pruebas virtuales podremos hacernos una idea de su utilización puesto que, se trata de una actividad voluntaria, que algunos no han realizado.

## Descripción de los materiales

En primer lugar, hicimos un documento explicándoles a los alumnos cómo bajarse el programa GeoGebra. Se trata de alumnos adultos que tienen muchas habilidades para moverse por Internet, pero pese a ello elaboramos este documento donde les dábamos las instrucciones básicas, desde donde tenían que dirigirse para bajar el programa (<http://www.geogebra.org/>) hasta que crearan una carpeta donde poner todos los applets que íbamos a ir subiendo a la herramienta recursos del sitio correspondiente a la asignatura de Matemáticas para la Empresa II en el aula virtual de la UMU, junto a algunas instrucciones básicas acerca del programa. En este primer documento añadíamos una breve descripción de cada uno de los ficheros que contenían los applets correspondientes al primer tema, Cálculo Integral. Les indicábamos cómo utilizar estos applets y les proponíamos que los utilizaran en la resolución de los ejercicios correspondientes a este tema.

### 1. Cálculo Integral

Los applets relacionados con integrales tocan diferentes aspectos:

1. Applet constante de integración (Figura 1) para entender el significado de la constante de integración en el cálculo de una integral indefinida. Al abrir el applet se observa una representación gráfica de color rojo que corresponde a la función integrando, la representación gráfica verde es una de las primitivas de la función integrando, que se desplaza conforme cambiamos la constante de integración (que podemos hacerlo utilizando un deslizador que representa la constante y que se puede manipular en el applet).

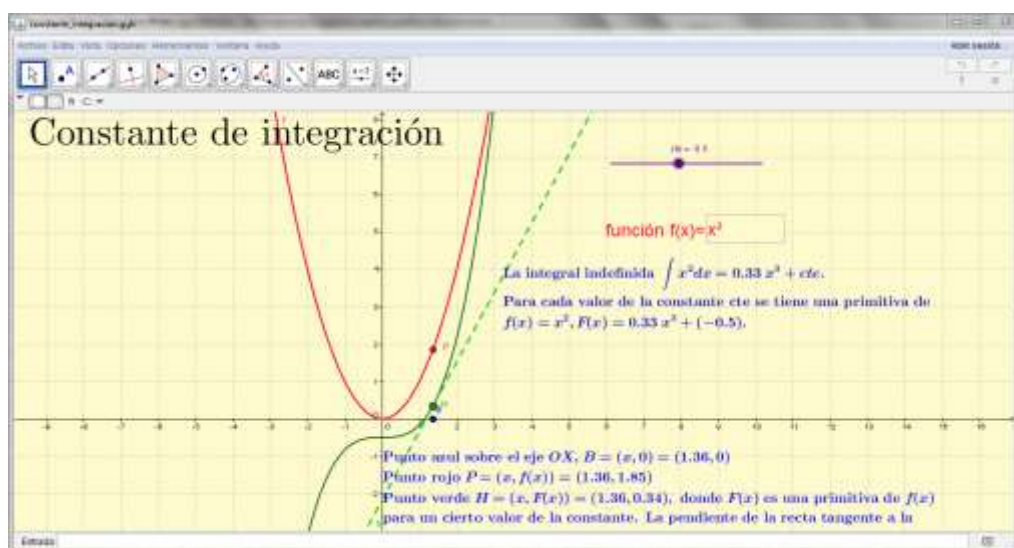


Figura 1: Applet sobre la constante de integración

2. El applet sobre integración por partes (Figura 2), propone distintos ejercicios, donde se pone en manifiesto la importancia de la elección de la función derivada y de la función sin

derivar en el integrando de la integral a resolver, quedando claro que una de las posibles elecciones complica la integración.

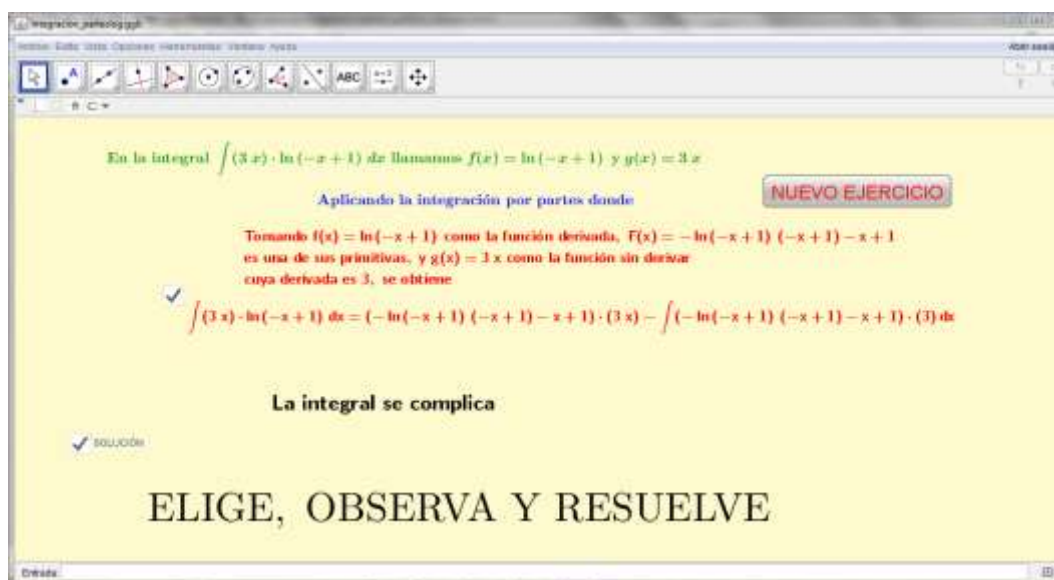
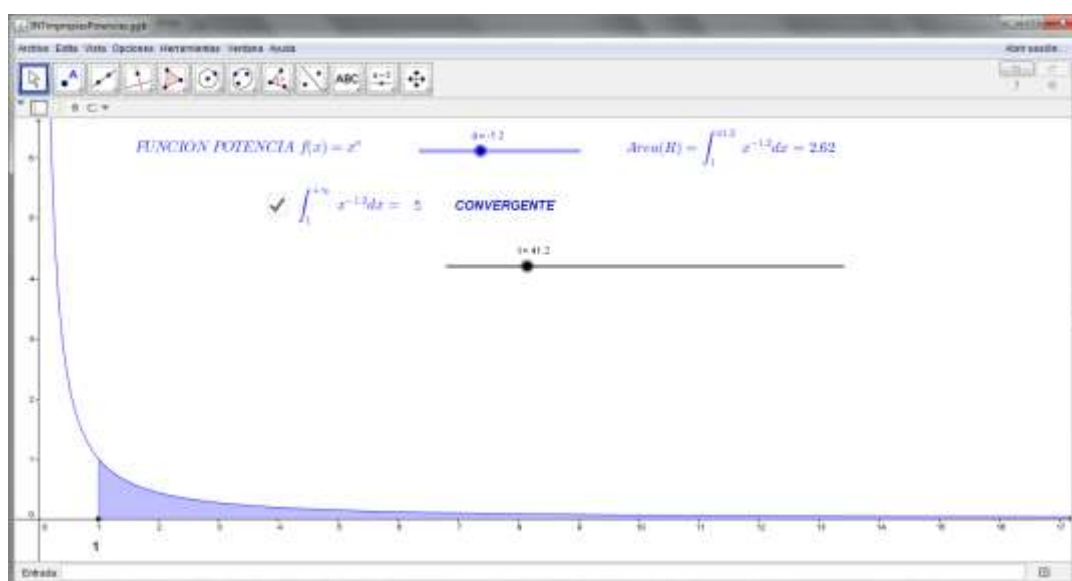


Figura 2 : Applet sobre integración por partes

3. Les proponemos tres applets sobre integrales de funciones en un intervalo de integración no acotado, (uno de ellos se muestra en la Figura 3). La función integrando es distinta según el applet, en uno se trata de la función exponencial de base  $e$ , cuya función exponente es lineal, esta función es la que el alumno puede manipular y observar cuando la integral es convergente o divergente. En otro la función exponencial tiene por base un número denotado por  $a$  y es el valor que podemos cambiar, según el cual integral cambia su carácter,



siendo el tercero de los applets el que tiene por función integrando una función potencia.

Figura 3: Applet sobre integración impropia

Más applets relacionados con integrales son los que permiten hacer integrales definidas cambiando los límites de integración, el que hace más fácil entender la función área cuando introducimos el concepto de integral definida o el que permite realizar integrales dobles sobre recintos rectangulares verticales.

## 2. Cálculo matricial y Formas cuadráticas

En relación a los temas de Cálculo matricial y Formas cuadráticas hemos realizado una serie de applets, varios relacionados con las propiedades de la suma y el producto de matrices, otro donde se pueden comprobar las propiedades de los determinantes para una matriz de orden 4 y los relacionados con las formas cuadráticas, éstos permiten clasificar formas cuadráticas y dar la expresión de una forma cuadrática restringida. Utilizando los applets, donde hay deslizadores que representan parámetros, podemos clasificar formas cuadráticas según los valores de estos e igualmente cuando restringimos formas cuadráticas a conjuntos que dependen de algún parámetro (Figuras 4 y 5 )

Relacionados con estos applets se ha elaborado un documento para los alumnos con una serie de cuestiones relacionadas con el cálculo matricial y las formas cuadráticas. Además, no podemos olvidar que los applets se pueden utilizar también para resolver los ejercicios que les proponemos a los alumnos.

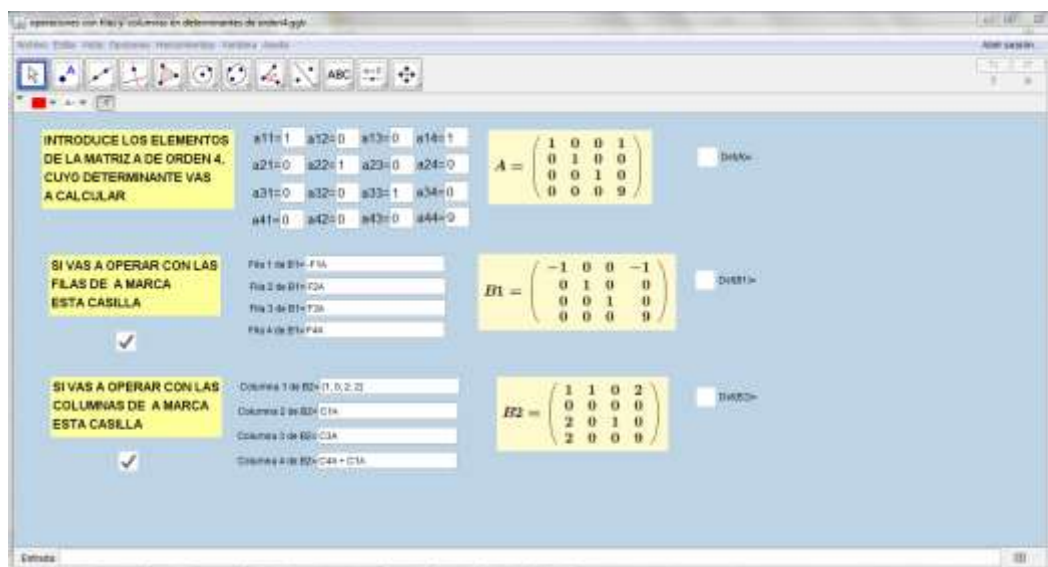


Figura 4 : Applet sobre propiedades de los determinantes

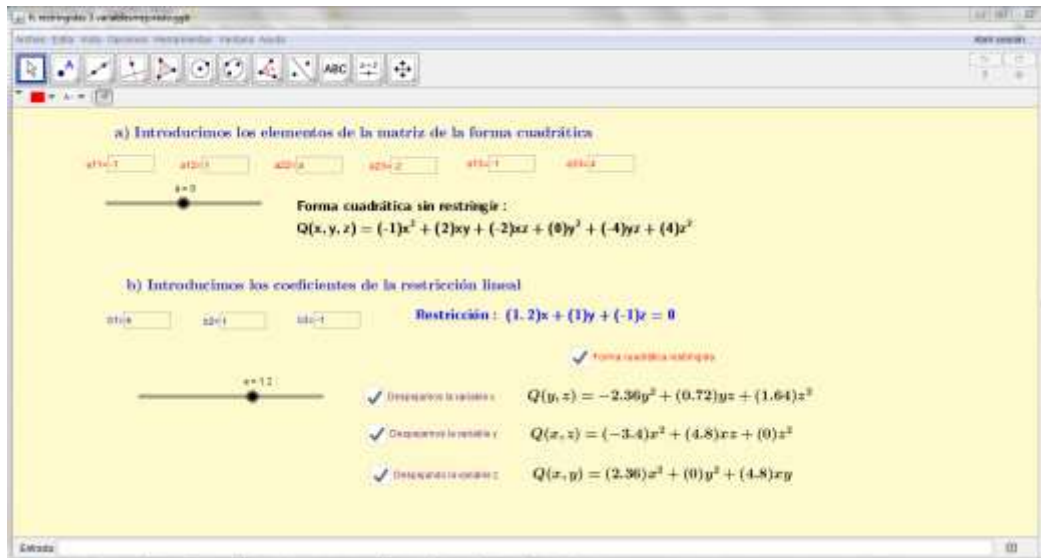


Figura 5 : Applet sobre formas cuadráticas restringidas

### 3. Introducción a las técnicas de optimización

Ahora estamos trabajando en la elaboración de applets para resolver gráficamente problemas de optimización. Nuestros alumnos, en su mayoría, han cursado el bachillerato de ciencias sociales y han resuelto gráficamente problemas de programación lineal. Los problemas de programación lineal son un tipo de problema de optimización, donde la solución óptima, si tienen, se alcanza en uno de los vértices del conjunto factible. Con ayuda de estos applets podemos poner ejemplos de problemas de optimización que no son de programación lineal y que alcanzan alguno de sus extremos absolutos en el interior del conjunto factible.

La Figura 6 muestra uno de los applets dedicados a este tema. En concreto este permite pasar de un problema de optimización a otro añadiendo una nueva restricción y les planteamos ¿qué podemos decir de la solución o soluciones del nuevo problema respecto del problema de partida?

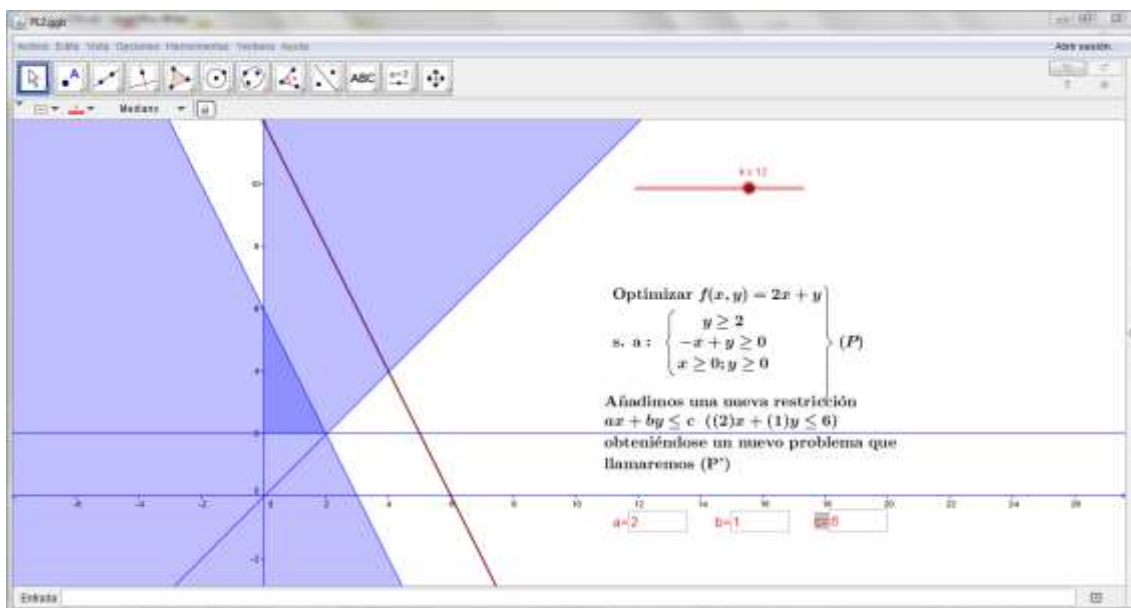


Figura 6: Applet sobre un problema de optimización

## Evaluación

Ya hemos realizado una de las pruebas virtuales con las que pensamos evaluar los temas para los que estamos elaborando estos materiales, y el próximo viernes 17 de abril realizaremos la segunda que tratará sobre cálculo matricial y formas cuadráticas.

Hemos utilizando la herramienta exámenes del sitio de la asignatura Matemáticas para la Empresa II del aula virtual de la universidad de Murcia. Para hacer la prueba, se fija un día y el estudiante dispone de una hora, una vez que ha cargado el ejercicio. Puede enviar la prueba hasta tres veces y nos quedamos con la nota más alta.

Una vez cargado el ejercicio, las preguntas que proponemos a los alumnos van apareciendo una detrás de otra. En la Figura 7 vemos una de las preguntas test propuestas, relacionadas con el cálculo integral, y que queremos que sean contestadas haciendo usos de los applets.

Preguntas 4 de 12

Utilizando el applet de la integral definida, señala el valor de la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{x^2} dx$$

A. 1

B. no se puede calcular

C. 1,09

[Borra selección](#)

Figura 7: Muestra de una pregunta test sobre integrales

Ahora estamos terminando de elaborar la prueba test sobre cálculo matricial y formas cuadráticas con preguntas como las que vemos en las Figuras 8 y 9.

Preguntas 3 de 33

Utilizando el applet del producto de matrices, calcular  $A^9$

sabiendo que  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A.  $\begin{pmatrix} 3^9 & 0 & 3^9 \\ 0 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 0 & 2^9 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 3 \cdot 5^8 & 0 & 3 \cdot 5^8 \\ 0 & 2^9 & 0 \\ 2 \cdot 5^8 & 0 & 2 \cdot 5^8 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 3 \cdot 5^9 & 0 & 3 \cdot 5^9 \\ 0 & 2^9 & 0 \\ 2 \cdot 5^9 & 0 & 2 \cdot 5^9 \end{pmatrix}$

[Borra selección](#)

Figura 8: Pregunta test de cálculo matricial

SEÑALA LA RESPUESTA CORRECTA

A. La forma cuadrática  $Q(x, y) = x^2 + 2xy + ay^2$  restringida al subconjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$
 es definida positiva cuando  $a > 0$

B. La forma cuadrática  $Q(x, y) = x^2 + 2xy + ay^2$  restringida al subconjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$
 es definida positiva cuando  $a \neq 0$

C. La forma cuadrática  $Q(x, y) = x^2 + 2xy + ay^2$  restringida al subconjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$
 es definida positiva cuando  $a < 0$

Borra selección

Figura 9: Pregunta test sobre formas cuadráticas restringidas

## Conclusiones

Este proyecto está en sus comienzos y todavía nos queda mucho en lo que trabajar: Completar la elaboración de los applets relacionados con los restantes temas de Matemáticas para la Empresa II y elaborar los relacionados con los contenidos de Matemáticas para la Empresa I.

Además, cada tema que vayamos completando propondremos a los alumnos una prueba test a través del aula virtual. Estas preguntas test se resuelven fácilmente utilizando los applets disponibles.

Nos gustaría evaluar el número de alumnos que hace cada una de las pruebas que vayamos proponiendo y estudiar la proporción de los estudiantes que las superan.

Para finalizar, animamos a los profesores a confeccionar sus propios applets con los que responder a las necesidades de sus alumnos y esperamos que nuestro esfuerzo en la elaboración de estos materiales esté resultando útil a nuestros alumnos.

## Referencias bibliográficas

[1] Gómez, F.; Alacid, V; Caballero, M.V. (2004): "Matemáticas para la Empresa". DM. Serie Tresmiles. Murcia (España).

[2] <http://institutosgeogebra.es/Webs-Matematicas/>

[3] <http://web.ua.es/es/ice/jornadas-redes-2011/documentos/posters/184346.pdf>