Propuesta metodológica para el aprendizaje de conceptos y relaciones geométricas: GeoGebra, debates en el aula y escritura reflexiva

Matías Arce Sánchez; Laura Conejo Garrote; Cristina Pecharromán Gómez; Tomás Ortega del Rincón

email: arcesan@am.uva.es; lconejo@am.uva.es; pecharroman@am.uva.es; ortega@am.uva.es

Universidad de Valladolid

RESUMEN

En esta comunicación describimos una metodología de participación activa del alumno durante el aprendizaje de conceptos y relaciones geométricas, llevada a cabo con estudiantes del Grado de Educación Primaria (futuros maestros). La propuesta metodológica se desarrolla en tres etapas progresivas: a) uso de GeoGebra para el reconocimiento gráfico de los conceptos geométricos y sus relaciones internas, b) debates en el aula basados en sus respuestas a la tarea GeoGebra, encaminados al reconocimiento y establecimiento formal de los conceptos y relaciones, c) reflexión escrita e individual sobre el proceso seguido y la evolución del aprendizaje personal. La metodología nos parece trasladable a otros niveles, como Secundaria, lo que aumenta el interés de su divulgación.

Palabras clave: metodología, geometría plana, GeoGebra, debates, escritura reflexiva.

Planteamiento general

Los cuatro autores de la comunicación somos profesores del Área de Didáctica de la Matemática, e impartimos docencia en el Grado de Educación Primaria en la Universidad de Valladolid, en los campus de Valladolid y de Soria. Nuestros alumnos son los futuros maestros de Educación Primaria. Estos alumnos tienen que cursar, obligatoriamente, tres asignaturas sobre fundamentos y didáctica de la matemática. Cada asignatura se centra en bloques de contenido diferentes: una asignatura está focalizada en la aritmética y el álgebra temprana (primer curso), otra en los contenidos básicos de geometría (segundo curso) y la tercera en los bloques de medida y de tratamiento de la información, azar y probabilidad (en cuarto curso). La metodología que aquí presentamos ha sido aplicada en la asignatura de segundo curso: "Fundamentos de la forma y el volumen y estrategias didácticas para su enseñanza".

Los alumnos que acceden a esta titulación lo pueden hacer a través de cualquiera de las ramas de bachillerato. Así, encontramos tanto estudiantes que han tenido formación matemática durante el bachillerato (modalidades científica o de Sociales), como otros que no la han tenido (humanidades), y cuyo último contacto con las matemáticas se remonta a la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Esa circunstancia suele provocar la presencia de diferencias importantes en los conocimientos previos de los alumnos sobre los contenidos tratados en las asignaturas y, también, de sus conocimientos sobre la propia estructura de las matemáticas y de su visión e interés hacia las mismas. Estas diferencias son un condicionante en el desarrollo de la formación de los futuros maestros. El estudio TEDS-M *(Teacher Education and Development Study in Mathematics)*, que es un estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros, pone de manifiesto la existencia en España de diferencias significativas en el nivel de conocimientos matemáticos de los futuros maestros al final de su formación inicial, según sea su itinerario de llegada a la carrera. La media obtenida en este estudio por los estudiantes que cursaron matemáticas en 2º de Bachillerato en la modalidad Científico-Tecnológica o de Ciencias de la Naturaleza y la Salud fue significativamente superior a la media del resto de estudiantes, y superior a la media internacional [1]. Además, la media en el estudio de los alumnos que cursaron matemáticas por última vez en 4º de ESO es significativamente inferior al resto e inferior a la media internacional [1].

Y todo ello sucede a pesar de que los contenidos matemáticos tratados durante su formación en el grado son los propios de la educación primaria y los primeros años de la ESO. El objetivo fundamental de las asignaturas de Matemáticas en el Grado en Educación Primaria es que los futuros maestros tengan un conocimiento amplio de la matemática básica elemental, que les permita desarrollar un conocimiento especializado, didáctico y curricular de las matemáticas para su enseñanza en Primaria [2]. Los contenidos tratados, especialmente los relativos a aritmética y geometría, han sido estudiados por los alumnos durante muchos años de su educación básica. Sin embargo, nuestra experiencia docente, contrastada por numerosos estudios de investigación, nos indica que el conocimiento previo de los contenidos que poseen los futuros maestros al empezar su formación inicial, en muchos casos, es débil y limitado, y está sustentado en la memorización de procesos mecánicos, que no son capaces de justificar o a los que no aportan sentido alguno, o en la presencia de imágenes mentales prototípicas sobre ciertos conceptos [3] [4] [5]. Es clave que los estudiantes para maestro superen esas limitaciones para que, como futuros profesionales, sean capaces de generar situaciones que permitan el desarrollo de conocimientos matemáticos significativos en los alumnos de Educ. Primaria, no basados en una visión y conocimientos de la disciplina puramente mecánicos.

Dentro del ámbito de los contenidos geométricos, estas dificultades se agudizan. Los alumnos no dominan gran parte del vocabulario geométrico básico y tienen unas concepciones de los objetos y conceptos geométricos basadas en representaciones prototípicas frecuentes en la docencia o en libros de texto (por ejemplo, que uno de los lados del triángulo sea siempre horizontal y su altura sea sólo la perpendicular vertical), olvidando en buena medida la significación de los conceptos. Todo ello complica la producción de descripciones adecuadas y de definiciones precisas de los elementos geométricos, así como la detección y el establecimiento de las propiedades que tienen en común o que diferencian a unos de otros.

Teniendo presentes todos los condicionantes anteriores, y con el propósito de ayudar a los estudiantes a superar los mismos, nos propusimos desarrollar una metodología que atendiera a los siguientes principios:

- Tener en cuenta la diversidad de conocimientos previos sobre contenido geométrico básico existente en el alumnado, adaptando los materiales y las sesiones a ellos.
- Respetar la presencia de diferentes ritmos de aprendizaje en el alumnado.
- Fomentar la práctica de construir descripciones y definiciones precisas de los elementos geométricos en los estudiantes. Lo mismo para la detección y verbalización de relaciones geométricas.
- Aprovechar las potencialidades de un programa de geometría dinámica gratuito y en continua actualización y expansión como GeoGebra.
- Desarrollar la necesidad de uso de un lenguaje y un vocabulario geométrico preciso en los estudiantes, así como su capacidad para comunicarse en matemáticas, tanto de forma verbal como escrita.

La metodología que describimos en esta comunicación pretende aunar y cumplir todos los requisitos anteriores, siendo esta forma de trabajar en el aula el resultado del desarrollo de varios Proyectos de Innovación Docente, llevados a cabo por los autores de este trabajo, en la Universidad de Valladolid. Los títulos de los proyectos son: “Construcción de applets GeoGebra para la enseñanza de la geometría en el Grado de Educación Primaria”, en el curso 2013/2014 y “Diseño y elaboración de unidades didácticas de matemáticas basadas en Libros GeoGebra para el Grado de Educación Primaria”, en el curso 2014/2015. En ambos proyectos se ha tratado de integrar el programa GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos y las relaciones geométricas.

En nuestro caso, hemos desarrollado e implementado esta metodología con estudiantes para maestro. No obstante, pensamos que la misma no es exclusiva de este ámbito y, por sus características, podría trasladarse sin problemas a las aulas de la ESO o incluso, con un nivel más descriptivo y básico, a los últimos años de Primaria.

La metodología resultante consta de tres pilares fundamentales:

1. Planteamiento de tareas con la ayuda del programa GeoGebra.
2. Debates en el aula basados en las respuestas de los alumnos a las tareas.
3. Tarea de escritura reflexiva individual sobre el proceso seguido por cada alumno, impresiones y evolución de su aprendizaje.

En el apartado siguiente justificamos brevemente la adecuación de estos tres pilares como motores de enseñanza para fortalecer el conocimiento geométrico-matemático y para fomentar el desarrollo de la competencia comunicativa en matemáticas.

Bases de la metodología propuesta

GeoGebra

Hoy en día, las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) ocupan un espacio progresivamente más importante e influyente en la sociedad en la que vivimos, estando cada vez más presentes en nuestras vidas. La escuela no puede ser ajena a ello, y en los últimos años se han intentado llevar a cabo diversos programas que pretenden aumentar el acceso de los alumnos a estas tecnologías. Sin embargo, la mera introducción de las TIC no es ninguna garantía en sí misma. El NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) se posiciona claramente a favor del acceso a la tecnología para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, pero enfatizando el papel fundamental del profesor en este proceso:

> “It is essential that teachers and students have regular access to technologies that support and advance mathematical sense making, reasoning, problem solving, and communication. Effective teachers optimize the potential of technology to develop students’ understanding, stimulate their interest, and increase their proficiency in mathematics. When teachers use technology strategically, they can provide greater access to mathematics for all students”. [6]

Drijvers, en un artículo donde presenta varios casos exitosos de introducción de TICs en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, identifica como factores cruciales para el éxito de estos procesos: el diseño adecuado de las tareas para explotar el potencial de la herramienta utilizada, el rol del profesor como director de orquesta del aprendizaje y un contexto educativo que integre de manera natural el trabajo con las TIC [7].

La TIC que es la base de nuestra propuesta metodológica es el programa GeoGebra, software multiplataforma cuyo uso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cada vez es mayor. Las razones fundamentales de su expansión y popularización son tres: su carácter gratuito, la sencillez del entorno y de su manejo, y la constante evolución de su potencial, al incorporar progresivamente más opciones y posibilidades. Entre las últimas están un soporte para el cálculo simbólico o una vista tridimensional para trabajar la geometría en el espacio. Actualmente es posible trabajar prácticamente cualquier contenido matemático escolar con este programa, con diferentes vistas adaptadas según los contenidos que se vayan a trabajar. En la Imagen 1 se observan las vistas algebraica, gráfica y la hoja de cálculo.

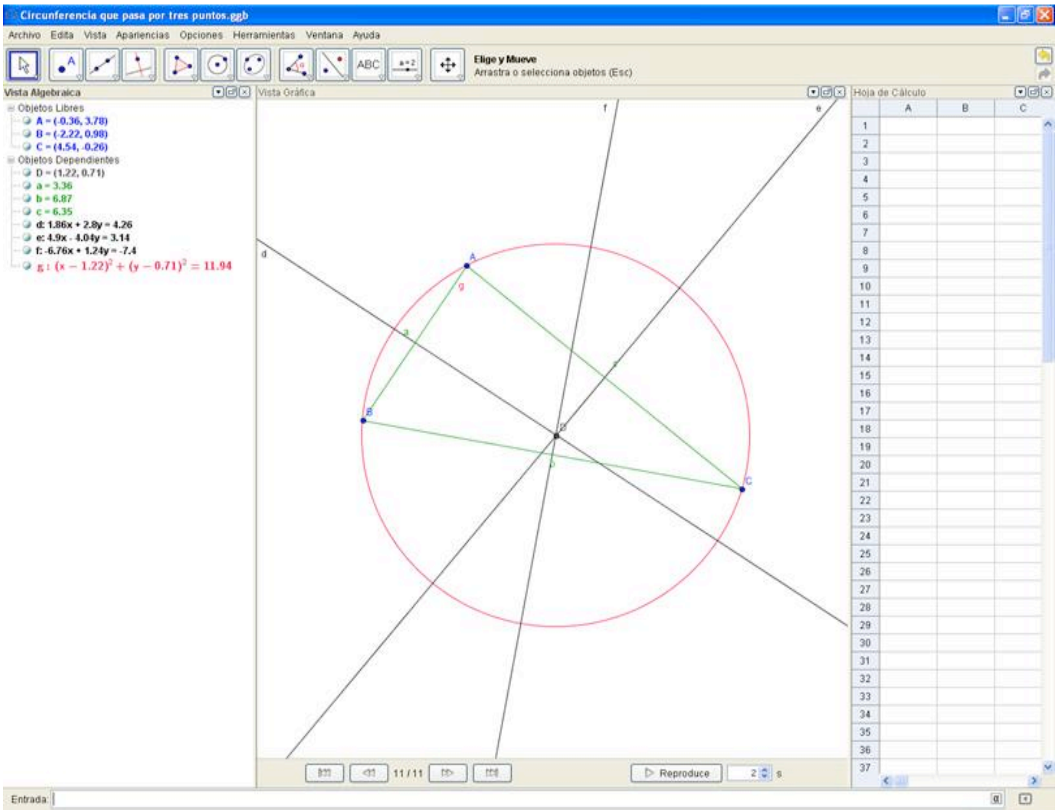


Imagen 1. Vistas algebraica, gráfica y hoja de cálculo del programa GeoGebra

Su gratuidad y su potencial educativo han hecho posible la creación de una página web, “GeoGebra Tube” (http://tube.geogebra.org). Esta web recoge un número ingente de recursos elaborados con el programa y que son compartidos por sus autores, creándose una “red” de usuarios. Para poder compartir nuestros recursos, y para poder descargar y utilizar recursos de otras personas que nos interesen, basta con darse de alta en la plataforma. Así, esta web se ha convertido en un magnífico repositorio de materiales compartidos y de uso libre creados con GeoGebra, que pueden ser utilizados en el aula de matemáticas.

Se puede trabajar con GeoGebra de dos maneras distintas: o bien utilizando el propio software para crear materiales o bien a través de *applets* ya creados, componentes de software que son ejecutados a través de Internet y con los que el usuario puede interactuar según las acciones que haya habilitado en él el creador del applet (por ejemplo, reproducir los pasos de la construcción, mover dinámicamente los elementos, construir otros, realizar mediciones…). La página GeoGebra Tube permite tanto trabajar con applets ya creados por otros usuarios como descargar los archivos GeoGebra asociados a los applets, lo que nos permite modificarlos o adaptarlos a nuestros intereses.

En la metodología que proponemos, la potencialidad fundamental de GeoGebra que explotamos es la de programa de geometría dinámica, es decir, que nos permite mover elementos de objetos conservándose las propiedades geométricas a través de las cuales fueron definidos. Lo utilizaremos como punto de partida para el desarrollo de aprendizajes de los conceptos y relaciones geométricas, en nuestro caso, en el plano. Su integración en la docencia no está concebida como un mero complemento del curso, sino como oportunidad para reflexionar sobre las clases teóricas tradicionales que presentan estos contenidos, buscando promover que los estudiantes se involucren de forma activa en su aprendizaje.

A partir de representaciones gráficas de conceptos geométricos construidas con GeoGebra, y utilizando el potencial de la geometría dinámica [8], pretendemos que los estudiantes reconozcan gráficamente y sean capaces de verbalizar cuáles son las características que nos permiten discriminar ese objeto de otros, como paso necesario para establecer definiciones precisas de los conceptos geométricos, detectando las características definidoras.

Con respecto a las relaciones geométricas, a partir de una configuración geométrica construida con GeoGebra en la que se cumpla cierta relación (por ejemplo, la configuración del Teorema de Tales), pretendemos que los estudiantes puedan detectar y conjeturar la existencia de esas relaciones geométricas y verbalizar sus conjeturas. La geometría dinámica tiene un papel fundamental, al proporcionar un rasgo de generalización de la relación a partir del movimiento [9]: el alumno puede comprobar si la relación se mantiene cuando se mueven elementos de la configuración, lo que permite aumentar su convencimiento sobre la veracidad de la relación o refutar la misma. Además, pensamos que ese convencimiento aporta una mayor motivación para utilizar la demostración matemática deductiva de estas relaciones.

Debates en el aula

El programa GeoGebra permite un desarrollo de los aprendizajes adaptado a los diferentes ritmos de los alumnos, pero es necesario establecer acciones que eviten un uso demasiado individualista de la tecnología [7]. En nuestro caso, tras el trabajo por parejas de los alumnos con el programa GeoGebra, el siguiente paso es la realización de una discusión grupal sobre las respuestas que han proporcionado las parejas de alumnos a los contenidos tratados con el programa. La discusión se encamina hacia la reconstrucción social de los aprendizajes y el establecimiento final, utilizando un lenguaje geométrico apropiado y preciso, de las definiciones y relaciones geométricas buscadas.

Los debates proporcionan un interesante modelo de aprendizaje social en el aula [10]. Además, en esta etapa también pretendemos fomentar en los alumnos la participación y la comunicación en matemáticas a través de exposiciones verbales, de forma oral, algo que generalmente suele pasar desapercibido y omitirse en muchos entornos escolares, no promoviéndose este hábito.

Como indica Mariotti, es fundamental el rol del profesor en discusiones matemáticas de este tipo [11]. En nuestro caso, el profesor es quien se encarga de seleccionar las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones planteadas sobre los contenidos tratados con GeoGebra. Éstas servirán de base para el debate y será el profesor el encargado de moderar y guiar la discusión, incitando una evolución hacia el rigor desde las definiciones y relaciones personales que han puesto de manifiesto los alumnos en la tarea. El debate se canaliza hacia el establecimiento progresivo de enunciados alternativos de las definiciones y relaciones que sean más precisos y completos. Éste es el objetivo final de esta etapa.

Escritura reflexiva en matemáticas

Una vez que se ha desarrollado la discusión en el aula, donde se espera que cada alumno se haya implicado en la misma y haya conseguido evolucionar en sus concepciones con respecto a las respuestas dadas en la tarea GeoGebra, es necesario hacer una reflexión que permita al alumno ordenar su pensamiento sobre el proceso seguido y los conceptos y relaciones involucradas. Para ello, las tareas de escritura son un excelente aliado. El NCTM defiende el uso de la escritura en las clases de matemáticas, como una herramienta efectiva que permite clarificar el pensamiento del alumno, y que le permite desarrollar una comprensión con mayor profundidad de conceptos, principios y técnicas [12]. Además, con ella los alumnos pueden mejorar sus destrezas en la explicación y argumentación matemática y en el dominio del lenguaje, a través de la aplicación, la conjetura y la defensa de sus ideas y pensamientos [12].

No obstante, y a pesar de su potencial, las tareas de escritura son poco usuales en las clases de matemáticas. Según su propósito, estas tareas suelen dividirse en dos grandes grupos [13]:

- Actividades de tipo “diario de clase”, donde se pide a los estudiantes que escriban, generalmente a modo de diario y después de cada clase, sobre la evolución de sus conocimientos y progresos, y sobre sus sentimientos y emociones acerca de lo que han aprendido e, incluso, sobre las matemáticas en general.

- Actividades de tipo “escritura expositiva”, donde se pide a los estudiantes que describan y/o expliquen algún concepto o técnica matemática de forma verbal.

La investigación de Salinas [14] ha evidenciado el poder de la escritura de tipo “diario de clase” entre futuros maestros de Primaria y en entornos de aprendizaje activos. No sólo se constató una mejora en los aprendizajes de los alumnos, sino también un cambio en su modo de apreciar y de entender las matemáticas, desapareciendo los miedos, temores y ansiedad inicial existente en muchos de ellos hacia esta disciplina. Así, tras la discusión en el aula, en nuestra metodología hemos incorporado la realización de una tarea de escritura reflexiva, de tipo “diario de clase”. En ella, se espera que los estudiantes hagan una valoración del proceso seguido, de su aprovechamiento y de la evolución de sus aprendizajes; algo especialmente importante entre estos alumnos, ya de edad adulta, que suelen tener concepciones muy arraigadas de algunos conceptos y relaciones forjadas a lo largo de su historial educativo. Además, el propio uso de la escritura también les ayudará a mejorar su comunicación matemática, teniendo que verbalizar sus ideas y estructurarlas de manera ordenada en un texto.

Contexto de puesta en práctica

La propuesta metodológica que explicaremos en el apartado siguiente ha sido puesta en práctica en la asignatura de 2º Curso del Grado de Educación Primaria, “Fundamentos de la forma y del volumen y estrategias didácticas para su enseñanza”, en la que se tratan tanto los contenidos geométricos básicos como la didáctica asociada a los mismos en el contexto de la Educación Primaria. La implementación se ha producido durante el curso 2014/2015, en tres grupos distintos de alumnos, dos del campus de Valladolid y otro más del campus de Soria.

Los grupos han sido muy numerosos (alrededor de 80 alumnos cada uno), por lo que la metodología se ha llevado a cabo, al menos en algunas fases, en los grupos de prácticas (cada grupo de teoría da lugar a dos grupos de prácticas), que son de unos 40 alumnos cada uno, en los que se desarrolla la metodología en paralelo.

No obstante, como ya hemos indicado con anterioridad, pensamos que la metodología que vamos a explicar a continuación puede ser trasladada a otros niveles educativos, como en la ESO o, de forma más básica, a Primaria. En estos casos, el número de alumnos por aula es más reducido que en la universidad, lo que permitiría una mayor focalización del profesor en lo que hace cada alumno y una mayor participación individual en los debates que redundará en aprendizajes de tipo social más efectivos.

Propuesta metodológica para el aprendizaje de conceptos y relaciones geométricas

La inspiración que sirve como punto de partida para el desarrollo y la implementación de la metodología que aquí explicamos está en los trabajos de Mariotti y colaboradores [11] [15] [16]. Estas autoras proponen la utilización de entornos de geometría dinámica y de discusiones colectivas como mediadores en el desarrollo y la evolución de los aprendizajes, hablando de *ciclos didácticos*, cada uno de ellos compuesto por actividades con un programa de Geometría dinámica sobre un cierto concepto o tópico, producciones individuales de los alumnos sobre las actividades y discusiones colectivas introducidas y dirigidas por el docente.

En nuestro caso, la propuesta metodológica que hemos introducido también mantiene esa estructura de *ciclos didácticos*, cada uno de ellos centrado en un conjunto de conceptos y/o relaciones geométricas determinadas, y que consta de las siguientes fases:

- Determinación de los conocimientos previos de los alumnos. Elaboración de materiales GeoGebra.
- Trabajo de los alumnos con entorno GeoGebra: producción de respuestas a tareas.
- Debate o discusión colectiva basada en las respuestas anteriores. Institucionalización de los conceptos y las relaciones por parte del profesor.
- Realización de tarea reflexiva individual sobre el proceso seguido y la evolución de sus

aprendizajes.

- Control posterior de los aprendizajes desarrollados.

A continuación explicamos con más detalle en qué consiste y cómo hemos desarrollado cada una de las fases, con algunos ejemplos concretos que muestren su filosofía.

Fase 1: Determinación de conocimientos previos. Elaboración de materiales GeoGebra.

Como ya hemos indicado anteriormente, existe una gran diversidad en la formación previa e interés por la materia de matemáticas en los alumnos del Grado de Educación Primaria. Además, es posible que los alumnos recuerden con diferente profundidad los conceptos geométricos básicos, con los que, en mayor o menor medida, han trabajado en la educación obligatoria. Así, es importante estudiar cuáles son los conocimientos que los alumnos participantes tienen sobre los conceptos y relaciones geométricas que van a tratarse utilizando esta metodología, para poder adaptar el diseño y elaboración de materiales GeoGebra.

Para ello, diseñamos un cuestionario con diferentes preguntas basadas en dichos conceptos y relaciones. Los temas que elegimos para el desarrollo de la metodología, y que, por tanto, son los temas que abarcó el cuestionario, fueron: elementos básicos de geometría plana, relaciones angulares, semejanza y Teorema de Tales y triángulos. La finalidad de este cuestionario es triple: por una parte, se trata de averiguar qué conocimientos tienen los alumnos sobre los conceptos básicos de Geometría; por otra, detectar los errores más frecuentes para organizar los debates posteriores sobre éstos; finalmente, una tercera finalidad es la construcción de materiales con el software GeoGebra y la orientación docente de las clases prácticas teniendo en cuenta estos errores.

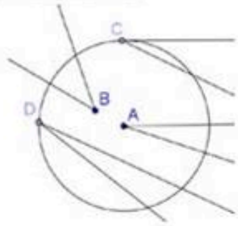
Los estudiantes cumplimentaron el cuestionario individualmente en el aula en la primera semana de la asignatura, y con anterioridad al comienzo de la docencia propia de la misma. El cuestionario constó de 30 preguntas, cada una de ellas con cuatro posibles respuestas, de las que tan sólo una es verdadera. Tanto las preguntas como las respuestas fueron planificadas teniendo en cuenta la experiencia de los autores como docentes de esta asignatura, así como los errores y deficiencias que son detectados de forma más frecuente. Además, para poder diferenciar posibles respuestas al azar de respuestas donde los alumnos estén seguros de su elección, añadimos una escala Likert de 1 a 5 por pregunta, en la que los alumnos debían indicar el grado de seguridad sobre la corrección de la respuesta marcada (desde “1”, que significa estar totalmente inseguro de la respuesta hasta “5”, que significa su completa seguridad). Se requirió a los estudiantes que contestaran todas las preguntas del cuestionario.

En la Imagen 2 mostramos dos ejemplos de preguntas:

1. Un ángulo es:
    a. La amplitud entre dos rectas o semirrectas.
    b. La parte común a dos rectas que se cortan en un vértice.
    c. La parte que determinan dos segmentos que tienen un origen común llamado vértice.
    d. La porción de plano limitado por dos semirrectas con un origen común llamado vértice.

Grado de seguridad de tu respuesta a la pregunta 1	1	2	3	4	5

2. De los ángulos de la figura, el inscrito es el que tiene como vértice:
    a. El punto A
    b. El punto B
    c. El punto C
    d. El punto D



Grado de seguridad de tu respuesta a la pregunta 2	1	2	3	4	5

Imagen 2. Escaneo de las dos primeras preguntas del cuestionario, ambas sobre ángulos.

El cuestionario nos mostró la presencia de bastantes deficiencias en los conocimientos geométricos de los alumnos del Grado, que no parecen recordar un número importante de conceptos y de relaciones geométricas básicas. Esta circunstancia se constata al observar que ningún alumno (de los más de 200 que hicieron el test) contestara más de 24 preguntas de forma correcta, que sólo un 20% de los estudiantes contestaran bien al menos a la mitad de la preguntas o que la media de respuestas correctas entre los participantes fuera de 11’71.

En relación a la pregunta primera que hemos mostrado, sobre el concepto de ángulo, un 40’8% de los alumnos marcó la respuesta correcta (la d), mientras que un 31’1% marca la opción c, un 18% contesta la opción a y, por último, un 9’2% señala la opción b. Como observamos, el número de respuestas incorrectas supera al de las correctas, algo que es común a un número importante de preguntas.

El porcentaje de respuestas correctas es más bajo en la segunda pregunta ejemplificada, sobre el reconocimiento de un ángulo inscrito, puesto que tan sólo el 27’7% de los estudiantes marca la opción correcta, respuesta d. En este caso, la opción más señalada no ha sido la correcta, sino la opción a, por lo que parece existir una confusión entre el ángulo inscrito y el ángulo central en un importante número de alumnos. Este hecho de que la opción más votada no sea la correcta se presenta en varias de las preguntas del test: existen algunos errores bastante generalizados que han sido tenidos en cuenta en el diseño de los materiales GeoGebra.

Además, existen algunas preguntas, como las relativas a puntos y rectas notables en un triángulo o a los teoremas del cateto y de la altura en triángulos rectángulos, donde la media del grado de seguridad en los alumnos que responden correctamente es baja, lo que muestra la presencia de algunos tópicos muy olvidados entre los alumnos.

Con anterioridad al test realizamos una planificación sobre qué conceptos y relaciones entre ellos había que tratar en cada uno de los ciclos didácticos, y el diseño y elaboración de los materiales GeoGebra que podrían proponerse en cada caso. Los resultados del test nos sirvieron para concretar más la orientación didáctica de estos materiales, enfatizando o teniendo especial cuidado con aquellos aspectos que se habían mostrado más confusos, menos conocidos o menos recordados por los alumnos.

Fase 2: Trabajo de los alumnos con entorno GeoGebra: producción de respuestas a tareas.

Una vez que se han diseñado y creado los materiales en el entorno GeoGebra y las tareas asociadas a ellos, la siguiente fase es el trabajo de los alumnos con estos materiales para, a través de ellos, completar las tareas que se plantean. Los applets creados utilizando GeoGebra fueron agrupados en bloques de cuatro, tratando en cada bloque un mismo tópico geométrico o tópicos muy relacionados. Los docentes proporcionan estos applets a los alumnos a través del campus virtual de la asignatura justo antes de que comience la sesión de trabajo, que se desarrolla en el Aula de Informática durante una hora. Los alumnos trabajan por parejas con los applets (un ordenador por pareja), contestando también como pareja a las diferentes preguntas que se plantean en el guión de trabajo. Optamos porque el trabajo sea realizado por parejas, en lugar de individualmente, ya que así los alumnos tienen que verbalizar y consensuar sus diferentes propuestas al resolver las tareas. Esas respuestas son escritas en el ordenador, utilizando un editor de texto, y son subidas por cada pareja al campus virtual de la asignatura.

Uno de los objetivos importantes que persigue la introducción del GeoGebra en esta asignatura es el de conseguir que los alumnos conozcan este software y su potencialidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esto supone una mejora para su formación como futuros profesionales docentes. Antes de comenzar el trabajo con los diferentes applets, los alumnos realizaron una práctica introductoria inicial para aprender a manejar el entorno GeoGebra de forma directa. Los alumnos, desde el primer instante, comenzaron a usar las herramientas más sencillas para representar los elementos básicos de la geometría sintética (puntos, rectas, semirrectas, segmentos, polígonos, circunferencias, paralelas,…).

La filosofía que subyace a los guiones de tareas planteados es el aprendizaje por descubrimiento de los conceptos y relaciones geométricas, a partir de la representación gráfica que, de ellas, nos proporciona el programa GeoGebra. Esa representación es, en algunos casos, proporcionada por el propio applet, mientras que en otros casos son los alumnos los que tienen que construirla durante el desarrollo del guión de tareas con el propio programa. No obstante, está claro que ese aprendizaje por descubrimiento está influenciado por los conocimientos previos que los alumnos tengan sobre los conceptos y relaciones geométricas básicas tratadas.

Las tareas que se plantean en los applets GeoGebra pueden considerarse, esencialmente, de tres tipos distintos. A continuación explicaremos estos tipos de tareas y proporcionaremos algunos ejemplos de applets construidos junto con los guiones de tareas. Estas tareas están disponibles de forma pública en la página GeoGebra Tube, facilitando aquí algunos enlaces a estos applets y guiones de tareas.

1. Tareas basadas en la construcción de elementos: En estas tareas se pide a los alumnos que construyan algún elemento geométrico, a través de indicaciones verbales o a través, directamente, de la definición verbal del elemento que se pretende construir. La razón de ser de las tareas de este tipo, que hemos incorporado en algunos applets, es la de fomentar que los alumnos continúen con su aprendizaje del entorno y de las herramientas de las que dispone GeoGebra. Estas tareas se complementan con tareas de los otros dos tipos que comentaremos en los siguientes puntos.

   Como ejemplo de applet con tareas de construcción destacamos el que trata el concepto de altura de un triángulo. En él se proporciona a los alumnos un triángulo y el comienzo de la construcción de una de las alturas, y se van indicando los pasos a seguir para construir las tres alturas. Posteriormente, se les pide que observen qué sucede con las tres rectas que contienen a las alturas. El enlace a la versión del applet para docentes es http://tube.geogebra.org/material/show/id/927275, mientras que el enlace de la versión para alumnos es http://tube.geogebra.org/student/m927275. En el Anexo 1 reproducimos tanto la situación inicial del applet como el guión de tareas propuesto en el mismo.

2. Tareas basadas en la escritura verbal de una descripción de pasos seguidos o de la definición de un concepto: El objetivo fundamental de las tareas de este tipo es que los alumnos sean capaces de construir una respuesta verbal, haciendo uso del lenguaje geométrico adecuado. En algunas de ellas se pide a los estudiantes que describan los pasos que se han seguido en alguna construcción proporcionada en el applet, pasos que pueden revisar utilizando la barra de navegación (por ejemplo, en la construcción de la mediatriz de un segmento). En otros casos se les pide que verbalicen posibles definiciones para conceptos geométricos que están representados gráficamente con el programa GeoGebra y que, por tanto, pueden manipular de forma dinámica. Buscamos que los alumnos reconozcan los elementos geométricos y detecten cuáles son las características

que sirven para discriminar y definir completamente un elemento, y que sean capaces de juntar esas características para formular una propuesta de definición.

Un ejemplo de actividad de este tipo puede ser la tarea número 5 del applet que hemos mostrado en el Anexo 1: los estudiantes tienen que proponer una definición de altura de un triángulo, una vez que las han construido y que pueden mover la construcción realizada.

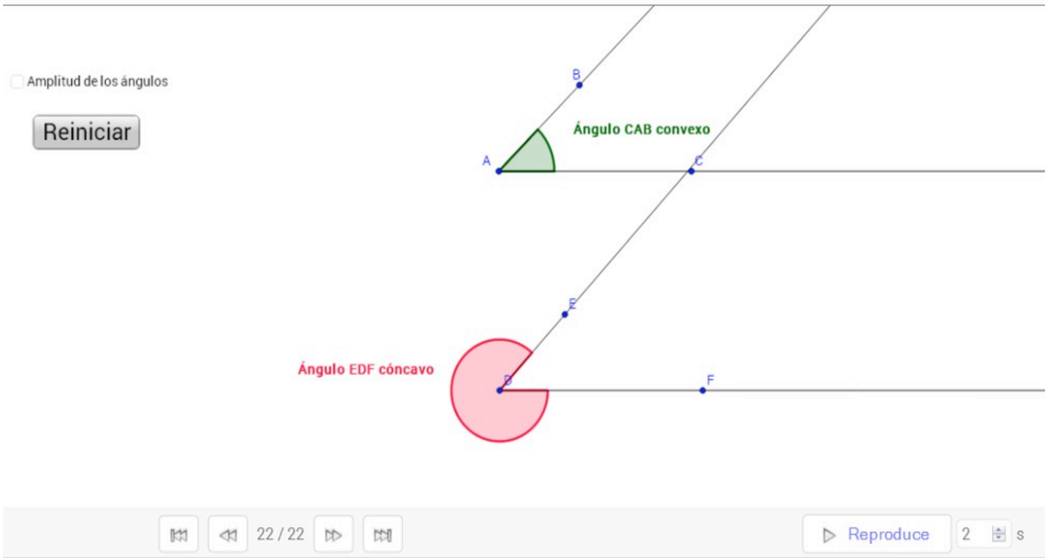


Imagen 3. Situación inicial en el applet sobre los conceptos de ángulo, ángulo cóncavo y convexo

Otro ejemplo es un applet creado sobre los conceptos de ángulo, ángulo convexo y cóncavo, cuyo enlace para docentes es http://tube.geogebra.org/material/show/id/925077, y el enlace de la versión para alumnos es http://tube.geogebra.org/student/m925077. En él, se indica la presencia de dos ángulos, uno de ellos cóncavo y otro convexo, junto con la ayuda de la barra de navegación (para revisar la construcción), y se pide a los alumnos que escriban definiciones para los tres conceptos: ángulo, ángulo convexo y ángulo cóncavo. En la Imagen 3 puede verse la pantalla GeoGebra con la situación inicial del applet.

3. Tareas basadas en el reconocimiento y detección de relaciones geométricas y la escritura verbal de conjeturas: Al igual que en las anteriores, en estas tareas también se busca que los estudiantes construyan una respuesta verbal a las preguntas utilizando el lenguaje geométrico de manera precisa y adecuada. Pero, en este caso, el objetivo principal es que los alumnos, a partir de una configuración representada de forma gráfica con el programa GeoGebra, y haciendo uso de la manipulación dinámica de la figura, sean capaces de detectar la existencia de relaciones entre elementos que se mantienen y poder conjeturar las mismas con cierto nivel de seguridad. Estas relaciones deben ser escritas verbalmente por los alumnos como respuesta a la tarea. Un ejemplo de tarea de este tipo es la tarea número 7 en el applet que ejemplificamos en el Anexo 1 (situación del ortocentro con respecto del triángulo según la forma de éste). Otro ejemplo de applet donde encontramos tareas de este tipo es el applet sobre el Teorema de Tales, donde además de la ventana gráfica, también se hace uso de la hoja de cálculo para ayudar a encontrar relaciones entre las longitudes de los segmentos que aparecen en la figura. El enlace para docentes de este applet es http://tube.geogebra.org/material/show/id/928383, y el de la versión para alumnos es http://tube.geogebra.org/student/m928383. Se muestra este applet en el Anexo 2 (ventana gráfica, hoja de cálculo y texto con guión de tareas).

Como puede observarse, en este applet se combinan tareas tanto de escritura de una definición verbal (segmentos correspondientes, tarea número 3), como tareas encaminadas a que los alumnos consigan detectar la relación entre longitudes de segmentos que enuncia el teorema de Tales y a que sean capaces de verbalizar dicha relación (en la tarea número 5). A continuación proporcionamos los enlaces a dos applets más (junto con sus guiones de tareas).

Uno de ellos trata el concepto de ángulos opuestos por el vértice, y está diseñado para que los alumnos sean capaces de definir el concepto a partir de su representación gráfica dinámica, a formular la conjetura sobre la relación de igual amplitud de estos ángulos y a demostrarla. El enlace para docentes es http://tube.geogebra.org/material/show/id/925249, mientras que la versión para alumnos es http://tube.geogebra.org/student/m925249.

El segundo trata sobre la relación angular que cumple el ángulo interior en una circunferencia con respecto a sus ángulos centrales correspondientes, donde se busca que los alumnos detecten esta relación y sean capaces de establecer verbalmente la conjetura. El enlace de la versión para docentes de este applet es http://tube.geogebra.org/material/show/id/928201, mientras que la versión para alumnos es http://tube.geogebra.org/student/m928201.

Mientras los alumnos trabajan por parejas con los applets en el Aula de Informática, el papel del profesor es el de resolver posibles dudas y orientaciones relacionadas con el uso del programa y del applet, pero intentando no intervenir e influir en el reconocimiento personal de los conceptos y en la detección y verbalización de las relaciones. No obstante, en casos en los que se detectó la existencia de un problema generalizado en algún aspecto geométrico concreto, sí que se proporcionaron aclaraciones y orientaciones que permitieran solventarlo y poder continuar con el desarrollo de la tarea.

No se observaron prácticamente problemas relacionados con el manejo del programa. Algunas parejas no consiguieron terminar las prácticas propuestas en el tiempo de clase y las completaron fuera del horario lectivo, a lo largo del mismo día en que se hizo la práctica. Sí que hubo que alertar a los estudiantes sobre el uso fraudulento de Internet observado en algunos de ellos, que copiaban literalmente definiciones de elementos de otras fuentes (por ejemplo, de la Wikipedia). Se les indicó cómo su comportamiento altera el desarrollo natural de la tarea (aprendizaje por descubrimiento), así como las etapas posteriores de la metodología, aclarándoles que el objetivo de esta segunda fase no era que los estudiantes fueran capaces de proporcionar una respuesta óptima, ni se les iba a evaluar por ello en este momento.

Fase 3: Debate o discusión colectiva basada en las respuestas anteriores. Institucionalización de conceptos y relaciones por el profesor.

Una vez resueltas las tareas por los alumnos y subidas las respuestas al campus virtual, el profesor realiza una lectura y revisión de las mismas. Estas respuestas son la base a partir de la cual se configura y estructura el debate o discusión en el aula que tiene lugar en la siguiente sesión de clase, cuando los alumnos aún tienen recientes las tareas y sus respuestas. El profesor realiza una selección de varias respuestas o de ideas que contienen esas respuestas que resultan incompletas, imprecisas, que contienen características o relaciones insuficientes, erróneas o irrelevantes, con preferencia para aquellas más frecuentes o comunes. El profesor, además, presenta las respuestas comenzando por las que considera más alejadas de la respuesta correcta, acercándose progresivamente a ésta.

El aprendizaje no es un proceso que pueda considerarse lineal, ni es igual en todos los alumnos. No obstante, se pretende que, a través de la discusión de las diferentes respuestas y de las aportaciones que vayan realizando los alumnos con la guía del profesor en el transcurso de la discusión, los estudiantes sean capaces de mejorar su verbalización de definiciones y relaciones de manera progresiva. Se busca que los alumnos se conciencien sobre cuáles son las características clave en cada caso, así como que sean conscientes de la importancia del uso de un lenguaje preciso en geometría, para concluir enunciando por sí mismos, y de modo preciso y completo, las definiciones y las relaciones trabajadas. Estos saberes son institucionalizados (en el sentido de Brousseau [17]) por el profesor, que establece la definición o relación tal como pertenece al saber cultural (en este caso matemático) de una sociedad.

Como ejemplo de selección de respuestas para el debate, mostramos cuáles fueron las respuestas que escogimos en dos tareas (número 1 y 3 del applet sobre el Teorema de Tales, tareas que pueden encontrarse en el Anexo 2 de esta comunicación).

Selección de respuestas a tarea 1, que pedía escribir dos proporciones con longitudes de segmentos de la recta AB y longitudes de segmentos de la recta AB':

- AC/AB=AB'/AC' (no es proporción: una de las razones está invertida)
- Proporciones: AB/AB', BC/BC', CD/CD' (confusión entre razón y proporción)
- AC/AB=CC'/BB' (aunque la proporción sea cierta, una de las razones no cumple lo

pedido, al no ser ni CC’ ni BB’ segmentos de las rectas AB y AB’)

- AB/BC=1.56=AB’/BC’, AB/BC=2.8=AB’/BC’ (proporción en dos situaciones distintas -dinamismo figura-, escriben B en lugar de B’ en el denominador de la segunda razón)
- AB/AB’=BC/BC’ (mismo error con la B en la segunda razón, mezclan razones de segmentos de AB y de AB’: no son las razones que involucra el teorema de Tales)

Selección de respuestas a tarea 3, donde las parejas de alumnos tenían que escribir una definición de segmentos correspondientes:

- Son aquellos que son proporcionales (desligan el concepto de la configuración, uso indebido de propiedad métrica –dos segmentos no pueden establecer una proporción).
- Son aquellos que parten del mismo origen y están cortados por la misma recta. Además se encuentran situados unos enfrente de otros (restricción a los que tienen como origen el punto A, uso de término no preciso: “enfrente”).
- Son los que están formados por los mismos puntos en cada una de las rectas secantes cortadas por paralelas (los segmentos no tienen los mismos puntos).
- Dos segmentos son correspondientes cuando se forman a partir de dos rectas secantes que son cortadas por varias rectas paralelas (parece indicar que cualquier pareja de segmentos formados en esta configuración son correspondientes).

El debate o discusión tiene lugar en el aula de clase, utilizando como base las respuestas de los alumnos seleccionadas por el docente. En la implementación hemos probado diferentes variantes organizativas. Una de ellas está provocada por el alto número de alumnos en el aula (unos 80), un número muy elevado para intentar desarrollar una discusión como la pretendida. No obstante, en ocasiones desarrollamos el debate con el grupo completo y, en otras, con los dos grupos de prácticas por separado (unos 40 alumnos cada uno). En el segundo caso, los alumnos tienen más oportunidades de participar y de implicarse más activamente, y el profesor puede controlar mejor el desarrollo del debate y las diferentes intervenciones de los alumnos, pero es necesario el doble de tiempo, al ser dos grupos en lugar de uno. Otra diferencia es la indicación explícita o no de la autoría de las producciones seleccionadas, para que fueran los propios autores los primeros en comentarlas con el resto de compañeros en la discusión. La indicación explícita tiene la desventaja de que muchos alumnos, si sus producciones no aparecen, no se impliquen en el debate, además de que algunos alumnos pudieran sentirse cohibidos si aparecen producciones suyas muy alejadas de lo pedido. Por ello, se optó por no indicar explícitamente la autoría y dejar a los alumnos participar libremente en el debate o discusión, lo que aumentó la participación. No obstante, hay que controlar que los alumnos más participativos no terminen protagonizando el debate, frente a otros que optan por no participar activamente al no verse directamente aludidos. El docente debe intentar corregirlo dando la palabra explícitamente a las personas que menos participen.

En todos los casos, un aspecto importante al implementar una metodología participativa basada en debates o discusiones es que los alumnos realmente lo perciban como una dinámica de trabajo en el aula, donde las diferentes intervenciones se ven como algo constructivo, y no como una experiencia aislada y desconectada de la realidad de la clase. Con el tiempo, los alumnos van perdiendo el miedo a participar y van ganando confianza con el formato, lo que hace más fructíferos los debates.

Como señala Mariotti [11], el profesor tiene un papel esencial en toda esta fase, como persona que prepara el debate y que guía la discusión que se produce, incitando y facilitando la evolución de los alumnos desde sus definiciones o relaciones personales, escritas en la tarea, hacia los enunciados matemáticos precisos y completos. Mariotti [11] destaca cuatro tipos de intervención del docente que son claves para conseguir este propósito: volver atrás y recordar la tarea pedida, focalizar la atención en aspectos específicos de especial interés cuando éstos emergen, requerir a los alumnos una síntesis de la discusión llevada a cabo sobre un concepto o relación, y proveer una síntesis, explicitando claramente la aceptación de elementos clave que son cruciales en las definiciones o relaciones que se pretenden establecer.

A lo largo de nuestra implementación de la metodología, puede diferenciarse la existencia de distintos tipos de interacción. Han existido momentos donde ha sido mayoritario el diálogo entre el profesor y un alumno o pareja de alumnos, otros donde se producen discusiones abiertas en las que los alumnos intervienen libremente (con el profesor como guía de la discusión), y algunos momentos de debate "real", donde los alumnos intentan argumentar respuestas divergentes ante una pregunta o ante una de las respuestas seleccionadas para el debate. En el caso de que no se produzca en estos debates un avance hacia la respuesta adecuada, el profesor interviene para institucionalizar el saber y poner de manifiesto qué concepciones son las que están produciendo el conflicto de respuestas.

A continuación se transcriben algunos ejemplos de los diferentes tipos de interacción descritos, que ponen de manifiesto cuál es la filosofía de esta fase de discusión en el aula. Primero mostramos un extracto donde predomina el diálogo profesor-alumno, producido durante la discusión sobre la definición del concepto de ángulo (ver Imagen 3). En esta discusión sí que se indicó explícitamente la autoría de cada producción, que era comentada por los propios autores, mostrándose algunos avances y reformulaciones que son fruto del avance de los diferentes diálogos y discusiones. En el siguiente extracto, observamos cómo los alumnos A1 y A2 son conscientes, de manera autónoma o a través de sus compañeros, de imprecisiones en la definición que proporcionaron en la tarea GeoGebra, formulando alternativas para la misma.

Prof.: A1 y A2 dicen que ángulo es "porción formada por dos líneas, que parten de un mismo número…"

A1 y A2: Punto, queríamos poner punto, ha sido un error.

Prof.: Vale, esto es un error. [Vuelve a definición] "… y cuya amplitud puede medirse en grados". Vuelve a salir la palabra amplitud, ¿verdad? Parece que lo asociáis con medida… Explicad eso.

A2: A ver, un ángulo… Es que es lo que pone ahí. Son dos líneas que parten de un mismo punto, entonces… el… el trozo, por así decirlo, que hay entre esas dos… semirrectas es el ángulo. A eso nos referimos con amplitud.

Prof.: [Dirigiéndose uno por uno a otros estudiantes de la clase] A ver, te pregunto a ti, eso de líneas… ¿Qué te parece?

A3: Eh… Pues, lo que pone. Es que no sé.

A4: Que las líneas pueden ser curvas. [Aprobación del profesor] Entonces ya no…

A2: Bueno, pues dos líneas RECTAS [enfatiza la palabra]

Durante el comentario y discusión de las definiciones seleccionadas por el docente sobre el concepto de ángulo, el profesor resalta términos o elementos clave que la definición debe contener. Una vez terminada la discusión de las definiciones, el profesor recogió todos estos elementos clave y enunció la definición precisa del concepto, tal como está institucionalizada por la comunidad matemática. En este caso se remarcó, especialmente, cómo la lectura gráfica de la figura nos lleva a la definición del concepto de ángulo, definición verbalizada oralmente: "Porción/Región/Subconjunto del plano limitado por dos semirrectas que tienen un origen común". Tras esto, varios alumnos repitieron la definición, siendo dificultoso para algunos estudiantes poder verbalizar la definición de forma completa y precisa.

En otros muchos casos, los propios alumnos son los que, durante las discusiones y diálogos, llegan a enunciar una definición o una relación precisa, muy evolucionada con respecto a sus producciones en la tarea GeoGebra, y que son producto del aprendizaje social vivido en esta fase con la guía del profesor. Queremos destacar el ejemplo del teorema de Tales, una relación cuyo enunciado preciso resulta laborioso. Muchas veces, por economía de lenguaje, se suelen omitir algunos aspectos necesarios del enunciado, incluso en manuales de geometría muy utilizados, como el de Puig Adam: "Si dos rectas *r* y *r'* se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra." [18]. Conviene aclarar que lo que son proporcionales no son los segmentos, sino las razones que forman las longitudes de los segmentos determinados por puntos correspondientes. Estas omisiones pueden dificultar el aprendizaje. En nuestro caso, en el desarrollo de la discusión del applet sobre el teorema de Tales (Anexo 2), hubo alumnos capaces de verbalizar, de modo preciso, el enunciado del teorema en los siguiente términos: "La razón de las longitudes de dos segmentos de una de las rectas secantes es proporcional a la razón de los segmentos correspondientes a éstos en la otra secante" (tras indicar la configuración de partida).

Un recurso importante del docente para promover la evolución de producciones incompletas que, por ejemplo, no contienen todas las características necesarias para definir un concepto y discriminarlo de otros, es la propuesta a los alumnos de contraejemplos durante la discusión en el aula. Estos contraejemplos cumplen con la definición propuesta pero no con la idea gráfica o mental que el alumno tiene del concepto que se está definiendo, buscando a través de los mismos la creación de conflictos que pongan de manifiesto la incompletitud de la definición. A continuación mostramos un fragmento de discusión donde el docente usa dos ángulos suplementarios pero no adyacentes como contraejemplo durante la discusión de este concepto:

Prof.: Una pareja ha escrito "dos ángulos son adyacentes porque los dos suman 180º. Por lo tanto, dos o más ángulos son adyacentes si la suma de ellos da 180º". ¿Eso está bien? ¿Es preciso? [Tras esto, dibuja dos ángulos suplementarios en la pizarra que no comparten vértice ni semirrecta, y muestra el applet con dos ángulos adyacentes] ¿Recordáis la figura?

A5: Yo creo que… sí que miden 180º. Si es a partir de una recta… La recta esa siempre va a tener 180º.

Prof.: Pero ellos no dicen eso, ¿no?

A5: [Pensativo] Ya, no lo dicen.

Prof.: No lo dicen. Fíjate, yo aquí he dibujado dos ángulos… ¿Lo ves? Su suma son 180º, estas dos semirrectas son paralelas, he querido trazarlas paralelas. ¿Alguien diría que esos dos ángulos que he pintado son adyacentes?

Alumnos (coro): No.

Prof.: ¿Por qué?

A6: Porque no comparten lado.

Prof.: Vale, luego ya hay algo que ha salido, y es que tienen que compartir lado [para ser adyacentes]

En algunas ocasiones, a partir de una propuesta de definición o relación, se producen discusiones entre los estudiantes en los que se van retroalimentando sus respuestas, mostrándose una mejora progresiva de la definición propuesta hacia el enunciado matemático preciso. Un ejemplo claro es la discusión que tuvo lugar al comentar la definición de "rectas perpendiculares" propuesta por una pareja de estudiantes en la tarea GeoGebra:

Prof.: [Lee la definición propuesta] "Recta que corta a otra horizontal formando ángulos rectos".

A7: Mal del todo no está. Está claro que si se cortan tendrá que ser… para que no… tengan la misma dirección.

Prof.: Bueno, pero eso, ¿no lo puedes mejorar?

A8: No tiene por qué cortar a una recta horizontal, puede cortar a una recta vertical también.

A5: Yo iba a decir lo que ha dicho ella, que también puede cortar a una recta vertical, no hace falta que sea siempre la perpendicular… con dirección… de arriba hacia abajo.

A8: Lo que tiene que hacer es cortarlo perpendicular… o sea, con ángulo de… que forme cuatro ángulos de 90º. Da igual la dirección en el plano.

Prof.: [Se dirige a A8] ¿Lo de recta horizontal tú lo quitarías?

Alumnos (Coro): Sí.

A8: Sí. [Poco después] O puedes decir recta que se corta con una…

A3: Hombre, si especificas que es recta vertical antes…

Prof.: ¿Y dónde se especifica que es recta vertical?

A3: Dices "una recta vertical que cruce… [Error común que rectifica] o sea, que se corte, con otra recta horizontal". Pues ya se cortan, y ya forman…

A5: Pero eso está mal también…

A9: Es que no tienen por qué ser ni verticales ni horizontales.

A10: Claro. El caso es que al cortarse formen cuatro ángulos rectos, independientemente de que sea vertical u horizontal.

Prof.: [Tras aclarar intuitivamente, y valiéndose de una bastón, qué se entiende generalmente por recta "horizontal", "inclinada" y "vertical"] ¿Está correcta [la definición]? ¿O quitaríais o pondríais algo?

A11: Yo creo que no tienen por qué estar, obligatoriamente, en horizontal y en vertical.

Prof.: Eso es. Fijaos, eso es una particularización, ¿de acuerdo? Al poner que una recta sea horizontal, lo que se entiende es aquella… diríamos, en que la altura respecto del suelo es la misma en todos los puntos. Suponiendo que el suelo fuese plano, claro. No tiene sentido hablar de perpendicular sólo a una recta horizontal. ¿De acuerdo? [Pregunta ahora a A12, que no había intervenido, para que verbalice la definición] ¿Qué son rectas perpendiculares?

A12: Las que… Las rectas que cortan a una recta horizontal formando ángulos iguales [el alumno incide en la particularización]

Prof.: Hemos dicho que lo de recta horizontal…

A12: Mal. Una recta vertical que corta a otra recta…

Prof.: Dos rectas que se cortan…

A12: Dos rectas que se cortan en un punto formando cuatro ángulos rectos o agudos.

Prof.: ¡Cuatro ángulos rectos! No rectos o agudos, si son agudos ya no son perpendiculares, si son obtusos tampoco. ¿De acuerdo? Cuatro ángulos rectos. Son las rectas que se cortan formando ángulos rectos.

El profesor pide verbalizar una definición de rectas perpendiculares como síntesis de la discusión a un estudiante, A12, que no ha intervenido en la misma. Sus respuestas denotan la no implicación del alumno en la discusión, volviendo a la propuesta inicial. Este hecho se repite en varias ocasiones con alumnos que no se involucran en las discusiones. Como medio para intentar evitarlo, se añadió la tarea reflexiva post-debate, que luego explicaremos.

En ocasiones, las interacciones sí que se acercan a un debate, con posturas encontradas entre los alumnos ante algún aspecto. Reproducimos aquí un extracto del debate producido ante la siguiente propuesta de definición de rectas paralelas: "Son las que no se cortan por mucho que se prolonguen", con alumnos que entendían la definición como correcta y otros que no. El profesor interviene para institucionalizar el saber al final del debate, explicando dónde se ha producido la confusión que impide avanzar a algunos alumnos hacia la explicación correcta.

A13: Esa está bien.

A14: Si no se cortan, está bien.

A15: Eso no tiene sentido.

A16: [Participa tras ser instada a ello por el docente] Esa está bien. ¡Claro!

A17: No sé. Es incompleta, pero está bien. [Tras esto, el profesor hace una encuesta a los alumnos, para que levanten la mano indicando si creen que está bien o no]

Prof.: A ver, los que creen que está bien, ¿por qué creen que está bien?

A18: Porque eso está bien, las paralelas, por mucho que se prolonguen, nunca se llegan a cortar, en ningún punto.

A29: ¡Claro!

Prof.: [Incita a participar a un alumno que había indicado con la mano su desacuerdo] A20, ¿tú qué creías?

A20: Que no, porque una recta es infinita y no la puedes prolongar.

A21: No la puedes prolongar.

A22: Tú puedes prolongar la representación…

Prof.: A ver, unos decís que sí porque se pueden prolongar. Los que decís que no…

A23: No se pueden prolongar, si es infinita…

A21: Una recta no se puede prolongar.

Prof.: Las rectas no se pueden prolongar, ¿de acuerdo? O tienen un punto en común, que se cortan, o no tienen ningún punto en común, pero no porque se puedan prolongar.

A10: Pero tú puedes hacer una recta así [con la mano] o una recta hasta la clase de allí…

Prof.: A ver, os equivocáis por la representación, por el dibujo. Tú puedes representar una recta así o así o así [diferentes longitudes]. Infinita no la puedes representar nunca, entre otros motivos porque no vas a vivir infinitos años, ¿de acuerdo? Es una representación. El concepto le tienes que tener aquí [en la mente]. Entonces tú no la puedes prolongar. Tú podrías prolongar la representación que haces, estirarla un poquito más. Tenéis que distinguir entre el concepto y su representación.

En todos los casos, estas discusiones y debates terminan con una institucionalización por parte del profesor tanto de los conceptos como de las relaciones tratadas, donde siempre son remarcados los enunciados precisos, tras recoger las ideas fundamentales que van emergiendo en el debate. Además, en el caso de las relaciones, una vez que se han enunciado y se ha comprobado de forma inductiva su validez (con el dinamismo de GeoGebra), el docente realiza la demostración deductiva de las mismas.

Fase 4: Realización de tarea reflexiva individual sobre el proceso seguido y la evolución de sus aprendizajes.

Esta fase ha sido añadida posteriormente, debido a que se observaba que muchos de los alumnos que no participaban en el debate no seguían el mismo, lo cual se refrendaba con pasajes como el que hemos ejemplificado previamente con A12 o por sus bajos resultados en las pruebas de control de aprendizajes, donde reincidían con concepciones previas mostradas en las tareas GeoGebra (como, por ejemplo, el hecho de aludir a la prolongación de las rectas al definir rectas paralelas).

Para intentar conseguir una mayor implicación en el debate de los alumnos, y que todos tuvieran que verbalizar la evolución de sus aprendizajes, sus concepciones sobre los conceptos o sus posibles dudas, se diseñó una actividad reflexiva de escritura, a realizar justo después del debate, para ser cumplimentada de forma individual por los alumnos. La tarea consta de cuatro preguntas, donde se pedía a los estudiantes que indicaran qué conceptos o relaciones se habían tratado en el debate, cómo habían evolucionado sus concepciones sobre ellos desde la tarea GeoGebra, dudas y otras reflexiones personales.

Esta tarea nos permite ver qué conceptos y relaciones tratadas han dejado mayor huella en los alumnos y cuáles han pasado más desapercibidos (mayor omisión en la tarea), y también la persistencia de algunas confusiones y errores en las explicaciones de los alumnos. Por ejemplo, en la tarea reflexiva tras la discusión en el aula del applet sobre el teorema de Tales, observamos cómo varios alumnos omitían este teorema al listar los elementos tratados, e incluían su enunciado dentro de la definición de segmentos correspondientes. También se observaron varias confusiones al diferenciar los conceptos de fracción, razón y proporción.

Los alumnos remarcan en la tarea la evolución positiva que han tenido sus concepciones sobre los conceptos y relaciones tratados. Algunos alumnos aluden a su mayor capacidad tras el debate para elaborar enunciados con mayor exactitud, completitud, claridad y un uso de los términos con mayor propiedad. Otros destacan su mayor habilidad para detectar errores comunes cometidos en los enunciados (para intentar evitarlos). Un último grupo opta por justificar su evolución a través de la indicación de aprendizajes concretos. No obstante, las frases son demasiado superficiales, existiendo un número muy pequeño de alumnos que hacen un estudio explícito de su evolución desde su respuesta a la tarea GeoGebra o, incluso, su concepción previa a esta tarea. Un ejemplo es la siguiente frase del estudiante A15: “Aprendí que para que una proporción lo sea, ha de existir una igualdad; y en el ejercicio se pedía una proporción de segmentos situados en las rectas secantes, cosa que no cumplimos en la práctica”, ante su respuesta a la tarea 2 del applet del Anexo 2.

Conviene remarcar que los alumnos dan un mayor énfasis a su evolución gracias a las discusiones en el aula de las respuestas dadas a la tarea GeoGebra, a las explicaciones del profesor y a la resolución de las dudas o puntos conflictivos cuando éstos se plantean. Muchos de ellos no mencionan el papel del Geogebra en esa evolución, incluso indican la dificultad de las tareas a realizar con los applets, donde se les pregunta sobre conceptos que dicen “desconocer por completo”. Quizá algunos alumnos no hayan detectado la potencialidad del GeoGebra e intenten dar una respuesta desligada de la utilización del programa, no habiendo entendido la filosofía subyacente a la metodología seguida.

Muchos alumnos hacen, en esta tarea, indicaciones muy positivas sobre la metodología que hemos implementado, por su dinamismo y por su utilidad para conseguir entender mejor los conceptos y las relaciones trabajadas. El estudiante A24 es el que indica con mayor claridad la contribución de cada fase: “Desde no saber qué era lo que me preguntaban, y tenerlo que intuir mediante los dibujos, a empezar a saber lo que es y comenzar a usar correctamente la terminología”. Otros ponen el énfasis en la dificultad de verbalizar definiciones de conceptos que creen conocer desde hace mucho tiempo, incluso algún alumno llega a cuestionar la utilidad que tiene conocer la definición verbal ante la mayor facilidad de “entender un dibujo”. Por el contrario, otros alumnos enfatizan que sería necesario destacar más las definiciones “correctas” tras la fase de discusión. Un número reducido de alumnos aprovechan la tarea para hacer autocrítica sobre su trabajo en la asignatura, indicando su necesidad de trabajar más con los conceptos planteados para conseguir evolucionar su conocimiento sobre los mismos.

En la pregunta sobre posibles dudas que puedan persistir o haberse generado tras la realización del debate, volvemos a encontrar respuestas demasiado genéricas, indicando conceptos que no les han quedado claros, pero sin especificar dudas concretas, salvo un número muy reducido de alumnos que, en el caso del teorema de Tales, plantean si es posible establecer el resultado cuando las dos rectas de partida son paralelas, en lugar de secantes, o si sería posible definir el concepto de razón entre figuras geométricas más generales.

Como incorporamos esta tarea ya avanzado el curso, es posible que los estudiantes no se hayan terminado de habituar a lo que se pretende con una tarea reflexiva de este tipo, lo que ha provocado una mayoría de respuestas de tipo superficial, sin que profundicen en contenidos concretos. Pensamos que una introducción desde el principio de tareas de escritura reflexiva conllevaría una mayor confianza y habituación de los alumnos a tareas de este tipo, que hubieran tenido su reflejo en respuestas más profundas o concretas, que mostraran una reflexión real sobre su proceso de aprendizaje durante las diferentes fases de la metodología.

Fase 5: Control posterior de los aprendizajes desarrollados.

El ciclo didáctico se cierra, una semana después de las fases anteriores, con una pequeña prueba individual por escrito, de corta duración (unos diez minutos), donde se plantean tres o cuatro cuestiones relacionadas con los conceptos y relaciones que se han tratado en el transcurso del ciclo didáctico. Entre las preguntas posibles está la escritura precisa de alguna definición o relación, la realización de un comentario completo de alguna de las respuestas seleccionadas durante los debates (sobre su corrección o no) o alguna aplicación práctica de las definiciones y relaciones tratadas. Estos pequeños controles aportan al profesor más información sobre la evolución que está teniendo cada alumno en la asignatura.

Conclusiones

En esta comunicación se ha presentado una metodología de aula que pretende promover la postura activa y participativa del alumno en su aprendizaje. Se trata de un planteamiento metodológico heurístico, guiado y reflexivo. Heurístico, porque se promueve que el alumno reconozca o descubra el concepto con suficiente generalidad, es decir, sin limitarse a prototipos que ya puedan tener adquiridos y que, en ocasiones, son erróneos. Guiado, porque a través de actividades con el programa GeoGebra y debates en el aula sobre las respuestas a estas actividades, se orienta el adecuado reconocimiento gráfico del concepto, las relaciones internas entre los elementos básicos que lo configuran y la expresión precisa de estas relaciones. Reflexivo, porque se promueve la participación del alumno en la valoración de su aprendizaje. Esta reflexión se motiva a través de los debates en el aula, que ponen de manifiesto errores y dificultades de aprendizaje, y la expresión escrita de su opinión sobre la evolución de su aprendizaje. Una postura crítica ante su aprendizaje puede motivar la mejora del mismo.

Esta metodología también se caracteriza por el trabajo en grupo de los alumnos. La comunicación entre los componentes del grupo permite poner de manifiesto el conocimiento previo necesario para el nuevo aprendizaje (como vocabulario geométrico básico), lo que, en cierta medida, facilita su unificación o cierta orientación a los alumnos con mayores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas o menor conocimiento previo debido a su recorrido académico. Asimismo, esta metodología permite una atención a la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje, ya que promueve que cada alumno sea protagonista de su aprendizaje. Cabe destacar que el uso del programa GeoGebra, como soporte de transmisión del contenido matemático, puede motivar el aprendizaje y, además, facilita el reconocimiento gráfico de los conceptos atendiendo a diversidad de casuísticas en que puede presentarse, debido al dinamismo que permite el programa sobre las figuras representadas.

En nuestro caso se trata de que, a través de las fases del modelo de enseñanza, los alumnos reconozcan los conceptos geométricos en su representación gráfica y las relaciones entre los elementos básicos que los configuran. A partir de la interpretación de estas relaciones, se pretende que los alumnos se acerquen con precisión o enuncien la definición o representación verbal y formal del concepto. Consideramos que la representación gráfica permite generar imágenes mentales, del concepto y de sus relaciones internas, que fundamentan la definición y permiten su recuerdo.

En general, no se observan dificultades en el reconocimiento gráfico del concepto y la asimilación de las distintas casuísticas en que puede presentarse el concepto en este registro. Sin embargo, sí que se observan dificultades para la expresión de la definición rigurosa. En concreto, se observan dificultades para la expresión de forma precisa y rigurosa de las relaciones entre los elementos básicos que configuran los conceptos y conducen a su definición formal. De hecho, durante los debates, se observa que los alumnos no dan mucha importancia a la expresión precisa de estas relaciones. Por tanto, no todos los alumnos llegan por sí mismos a la definición del concepto. No obstante, cuando se les ofrece dicha representación, consideran que la comprenden, que se corresponde con la imagen gráfica global que tienen del concepto y reconocen los errores cometidos en sus expresiones. Sin embargo, cuando se les pide reproducir la definición del concepto, muchos alumnos no son capaces de hacerlo bien. Esto pone de manifiesto que, en realidad, no ha habido una adecuada comprensión aunque ellos perciban que sí que se ha producido. Ha habido un reconocimiento global del concepto en su representación gráfica, pero no de las relaciones internas entre los elementos básicos que le constituyen.

Finalmente, tampoco desestimamos que las dificultades para la expresión verbal de estas relaciones sean debidas a no tener una adecuada competencia lingüística. En este sentido, los debates en el aula y la expresión oral y escrita de las definiciones de los conceptos han contribuido a la mejora de esta competencia y, en concreto, a la adquisición de lenguaje matemático, algo necesario para el ejercicio de la profesión de profesor.

Referencias bibliográficas

[1] Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2012). “TEDS-M. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español”. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid (España).

[2] Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). “Content knowledge for teaching: What makes it special?” Journal of Teacher Education, vol. 59, nº5, pp. 389-407.

[3] Browning, C.; Edson, J. A.; Kimani, P. M.; Aslan-Tutak, F. (2014). “Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Geometry and Measurement”. The Mathematics Enthusiast, vol. 11, nº 2, pp. 333-384.

[4] Montes, M. A.; Contreras, L. C.; Liñán, M. M.; Muñoz-Catalán, M. C.; Climent, N; Carrillo, J. (2015). “Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas”. Revista de Educación, vol. 367, pp. 36-62.

[5] Barrera, V.; Infante, J. M.; Liñán, M. M. (2013). “Conocimiento matemático común en geometría de los estudiantes para maestro: una propuesta de innovación”. Escuela Abierta, vol. 16, pp. 11-33.

[6] National Council of Teachers of Mathematics (2011). “Technology in Teaching and Learning

Mathematics”. Disponible en: http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Technology-in-Teaching-and-Learning-Mathematics/ [Consultado el día 23 de marzo de 2015]

[7] Drijvers, P. (2013). “Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn’t)”. Revista PNA, vol. 8, nº 1, pp.1-20.

[8] Sinclair, M. P. (2003). “The provision of accurate images with dynamic geometry”. En N. Paterman, B. J. Dougherty y J. Zillox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, vol. 4, pp. 191-198. Honolulu, Hawai (Estados Unidos).

[9] de Villiers, M. (1996). “Why proof in dynamic geometry”. En M. de Villiers (Ed.), Proofs and proving: why, when and how?, pp. 23-42. Ed. AMESA. Sudáfrica.

[10] Blázquez, S.; Ibañes, M.; Ortega, T. (2005). “Debates y entrevistas”. En J. V. Aymerich y S. Macario (Eds.), Matemáticas para el siglo XXI. Colección *Treballs D’Informàtica i Tecnologia*, nº22, pp.103-109. Universidad Jaume I, Castellón (España).

[11] Mariotti, M. A. (2009). “Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher”. ZDM: The international journal on Mathematics Education, vol. 41, nº 4, pp. 427-440.

[12] National Council of Teachers of Mathematics (2003). “Principios y estándares para la educación matemática”. Traducción de la SAEM Thales, Sevilla (España).

[13] Shield, M.; Galbraith, P. (1998). “The analysis of student expository writing in Mathematics”. Educational Studies in Mathematics, vol. 36, pp. 29-52.

[14] Salinas, T. (2004). “Effects of reflective notebooks on perceptions of learning and mathematics anxiety”. Revista PRIMUS, vol. 14, nº 4, pp. 315-327.

[15] Falcade, R.; Laborde, C.; Mariotti, M. A. (2007). “Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation”. Educational Studies in Mathematics, vol. 66, nº 3, p. 317-333.

[16] Mariotti, M. A. (2013). “Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS”. ZDM: The international journal of Mathematics Education, vol. 45, nº 3, p. 441-452.

[17] Brousseau, G. (1998). “Théorie des situations didactiques”. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble (Francia).

[18] Puig Adam, P. (1976). “Curso de Geometría Métrica”. Biblioteca Matemática, Madrid (España).

Anexos

Anexo 1. Applet para trabajar las alturas de un triángulo y guión de tareas

A continuación reproducimos el texto que acompaña al applet (el texto introductorio previo y el guión de tareas para los alumnos) junto con la imagen donde se observa la situación inicial de la ventana gráfica (ver Imagen 4). Cada pareja de alumnos, utilizando como ayuda la ventana gráfica y el dinamismo del programa GeoGebra, debe dar respuesta a las tareas, bien realizando la construcción sobre la ventana gráfica del propio applet o bien, en aquellas donde tengan que escribir algo, elaborando un documento de respuestas con un editor de textos.

Texto introductorio:

En el siguiente applet se ha dibujado un triángulo ABC.

Sigue los pasos que se indican para completar la construcción y poder responder a las preguntas planteadas.

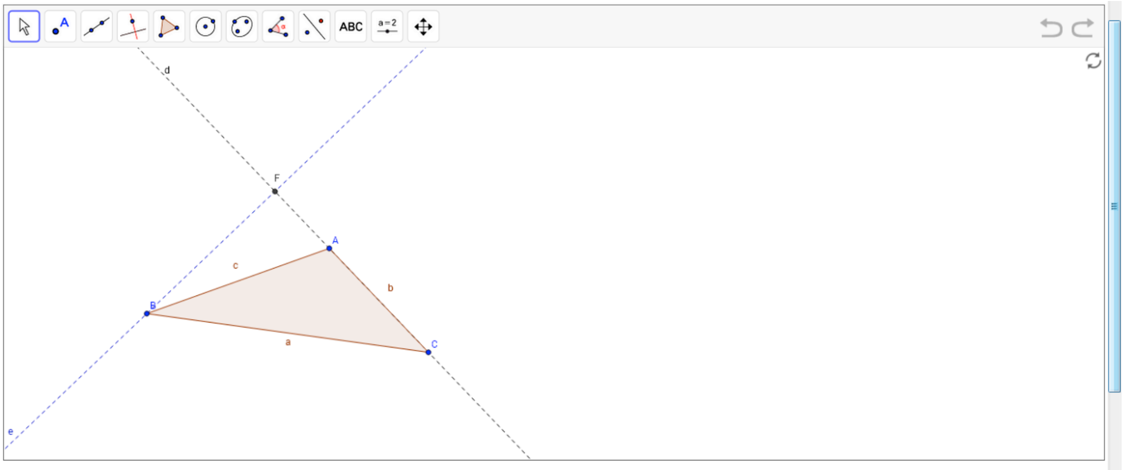


Imagen 4. Situación inicial en el applet sobre las alturas de un triángulo

Tareas para los alumnos:

1. Se ha dibujado, utilizando el estilo de línea de trazos, la recta que contiene al lado AC. Realiza esta construcción para los otros dos lados del triángulo.

2. Se ha dibujado, utilizando la línea de trazos y con color azul, la recta perpendicular al lado AC que pasa por el vértice opuesto, B. Realiza esta misma construcción para los otros lados del triángulo.

3. Nombra las intersecciones de los lados del triángulo (o de las rectas que los contienen) con sus perpendiculares del siguiente modo: D para la intersección que involucra al lado AB, E para la del BC y F para la del AC (ya dibujada).

4. CD es la altura del triángulo sobre AB, AE es la altura del triángulo sobre BC y BF es la altura del triángulo sobre AC. Dibuja estos segmentos sobre la figura.

5. Escribe la definición de altura de un triángulo.

6. Mueve los vértices del triángulo y observa qué sucede con las rectas que contienen a las alturas. Verás que las tres rectas se cortan en un punto. Dicho punto es el ortocentro, y es uno de los puntos notables del triángulo.

7. Mueve la figura y observa si el ortocentro se sitúa dentro o fuera del triángulo. Escribe qué relaciones detectas entre la situación del ortocentro y el tipo de triángulo.

Anexo 2. Applet sobre los conceptos de razón y proporción y el Teorema de Tales

A continuación reproducimos el texto que acompaña al applet (texto introductorio, guión de tareas para los alumnos) junto con la imagen donde se observa la situación inicial de la ventana gráfica y la hoja de cálculo (Imagen 5).

Texto introductorio:

La figura está formada por dos rectas secantes (pudieran no serlo) y un haz de rectas paralelas. Esta figura se llama **Figura de Tales**.

Con la barra de navegación puedes revisar cómo se ha construido.

En la Hoja de Cálculo puedes introducir las longitudes de los segmentos escribiendo en una celda la expresión **=Distancia[origen, extremo]**.

Una **razón** es un cociente entre dos números. Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Un ejemplo de proporción utilizando longitudes de segmentos de la recta AB y de la recta AB’ es AB/BC=AB'/B'C'. Mueve los puntos A, B y C y comprueba cómo las dos razones siguen formando una proporción.

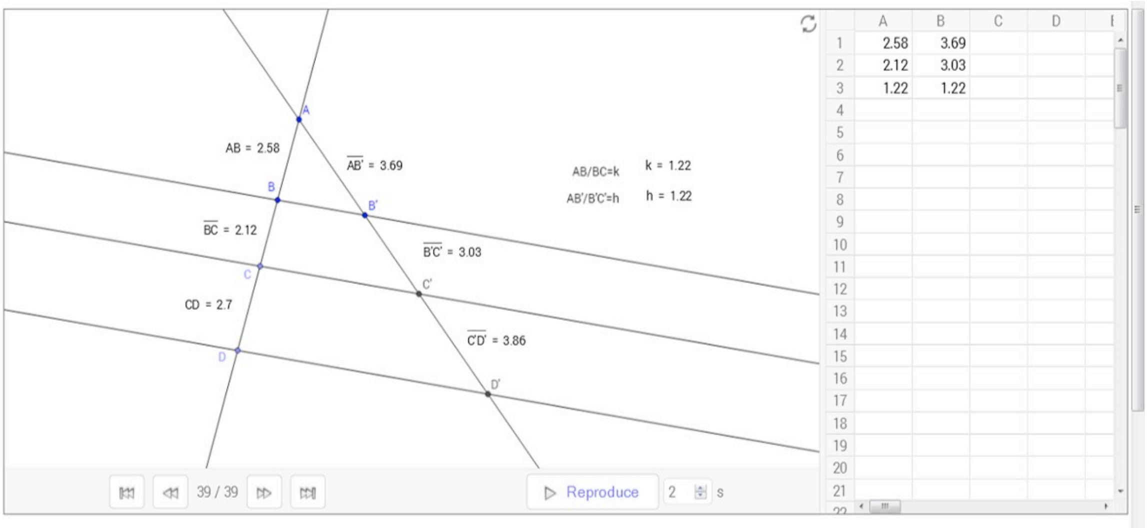


Imagen 5. Situación inicial en la ventana gráfica y hoja de cálculo en el applet sobre el Teorema de Tales

<u>Tareas para los alumnos:</u>

1. Ayudándote de la hoja de cálculo, encuentra otras dos proporciones con longitudes de segmentos de la recta AB y longitudes de segmentos de la recta AB' y escríbelas. Comprueba que se mantienen al mover la figura.

2. Escribe una razón entre las longitudes de las segmentos de AB y otra entre los segmentos de AB' que no formen una proporción.

3. Los segmentos AB y AB', BC y B'C', AC y AC', CD y C'D', BD y B'D', AD y AD' se llaman **segmentos correspondientes**. Escribe lo que entiendas que son segmentos correspondientes.

4. Utilizando la hoja de cálculo, calcula en la columna C cuatro razones de las longitudes de los segmentos de AB y en la D las cuatro razones de las longitudes de los segmentos correspondientes en AB'.

5. Mueve la figura y observa qué sucede con esas razones. Escribe lo que creas que caracteriza a las relaciones entre las medidas de los segmentos.