Algoritmos históricos en el aula

Joan Jareño Ruiz

email: jjareno@xtec.cat

CESIRE-CREAMAT – Catalunya

RESUMEN

El posible trabajo con algoritmos históricos de cálculo en el aula ha de ir más allá de la simple reproducción. No tiene sentido ejercitar métodos de cálculo por simple curiosidad, más allá de ver que las matemáticas también "evolucionan". Tendrá sentido hacerlo si el algoritmo aporta alguna claridad que el actual no tiene. Otra cosa es investigar los algoritmos: descubrir cómo funcionan, por qué. La propuesta de este taller va en esta línea: investigar algunos algoritmos históricos de la resta, el producto, la división y la raíz cuadrada.

Historia, cálculo, actividad, investigar, problemas

Algunos algoritmos para trabajar

En un taller no se puede hacer un estudio exhaustivo de los diferentes algoritmos históricos. Por lo tanto se presentan sólo algunos referidos a la resta, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada.

La multiplicación y la división en Egipto

En el antiguo Egipto se utilizaba un algoritmo muy "natural" para la multiplicación que se basaba en el uso de dobles y sumas.

Producto a realizar 26 x 384 = 9984			
Números que suman 26	**"Veces"**	**Dobles**	**Productos a escoger**
	1	384	
*	2	768	*
	4	1536	
*	8	3072	*
*	16	6144	*
26 x 384 = 768 + 3072 + 6144 = **9984**			

La división no utiliza un método muy diferente. Sólo hay que hacer una adaptación. Podemos pedir que, a partir de algunos ejemplos se descubra y explique el método y se justifique.

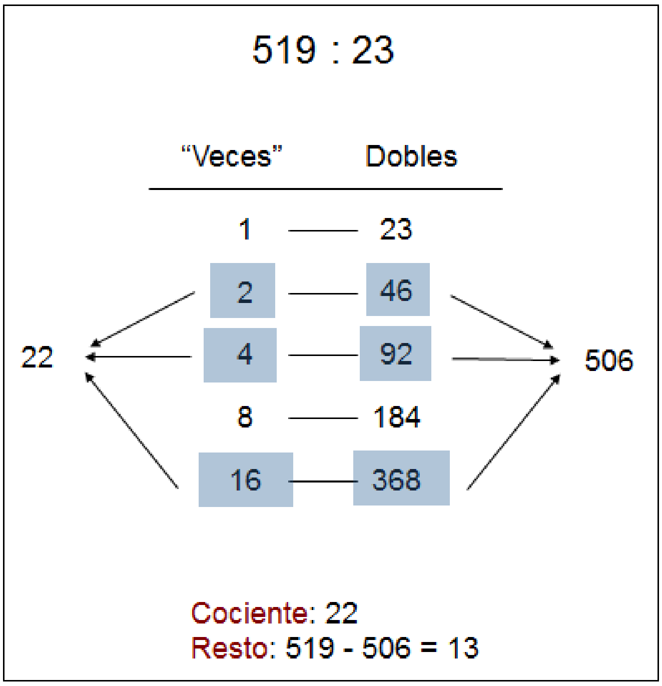

Imagen 1. División egipcia

Un método para las resta con ábaco

El siguiente algoritmo para la resta se utilizaba frecuentemente cuando se calculaba con ábacos. No es difícil adaptarlo al cálculo escrito. Se observará que, al convertir la resta en una suma se elimina la dificultad de “la resta llevando”.

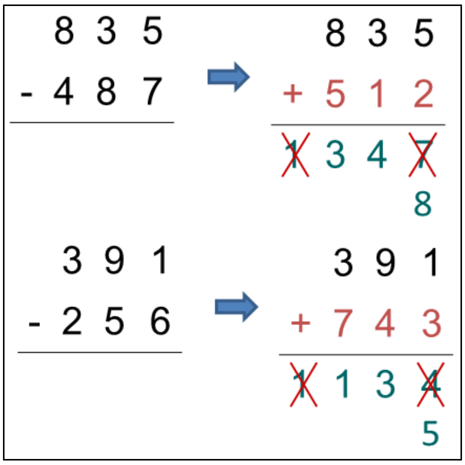

Imagen 2. Ejemplos de resta

¿Cómo funciona el algoritmo? ¿Puedes justificarlo de alguna manera?

Una multiplicación de la Edad Media

Este algoritmo, que presentamos en algunos pasos, se utilizó durante la Edad Media. ¿Puedes explicar su funcionamiento? ¿Y justificar la colocación de los resultados parciales?

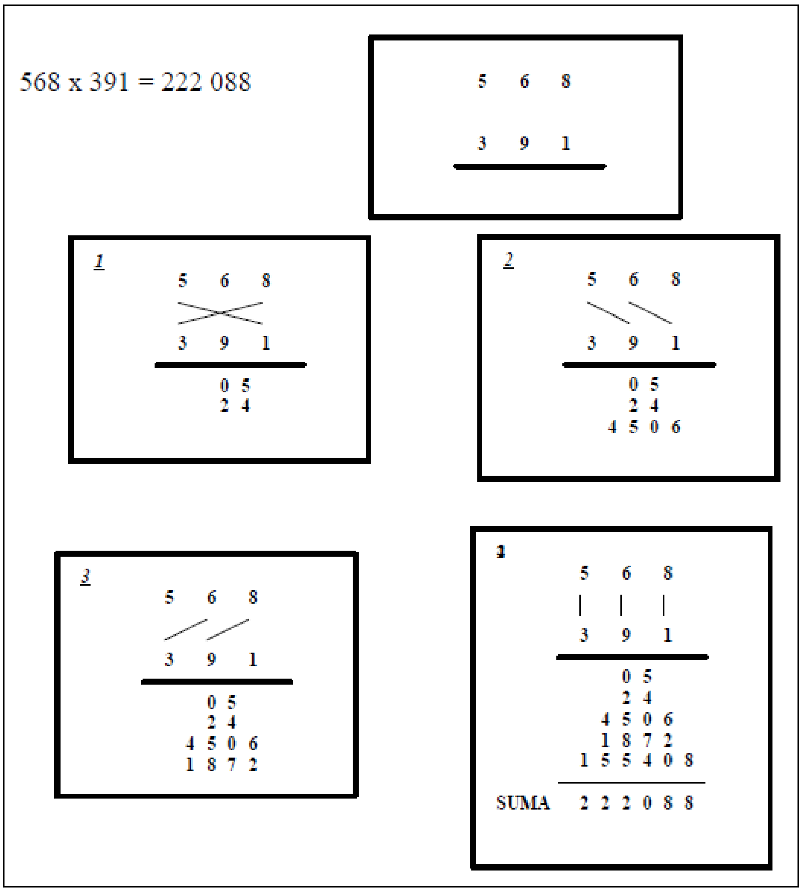

Imagen 3. Ejemplo de multiplicación por pirámide

La multiplicación veda

Este algoritmo, aparece en un texto hindú del siglo XI a.n.e. Curiosamente también aparece en la novela “La analfabeta que era un genio de los números” de Jonas Jonasson.

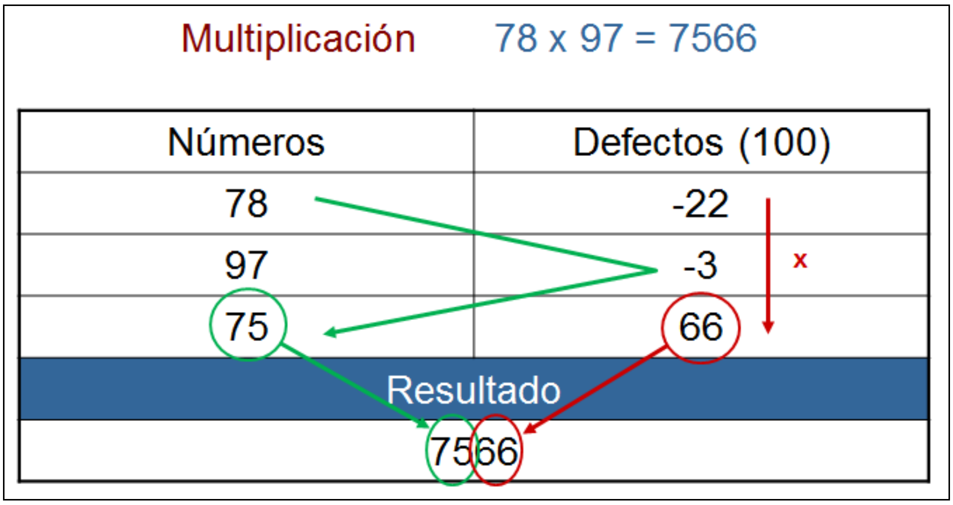

Imagen 4. Ejemplo de multiplicación veda

- Intenta aplicarlo con otro par de números ligeramente inferiores a 100.
- Después lo puedes intentar con dos números ligeramente superiores a 100.
- ¿Cómo se tendrá que adaptar el algoritmo si un está un poco por encima de 100 y el otro un poco por debajo?
- Justifica algebraicamente el algoritmo.

La división por diferencias

En este algoritmo de la división, explicado por Gerbert D’Orlhac, no hace falta ir tanteando para ver si la cifra del cociente “cabe”, ni restar, ya que se resuelve con sumas. Mostramos cuatro momentos del algoritmo.

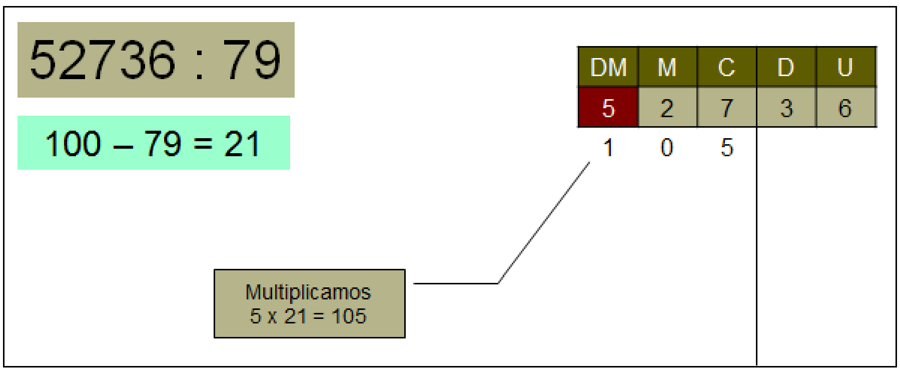

Imagen 5. División por diferencias (1)

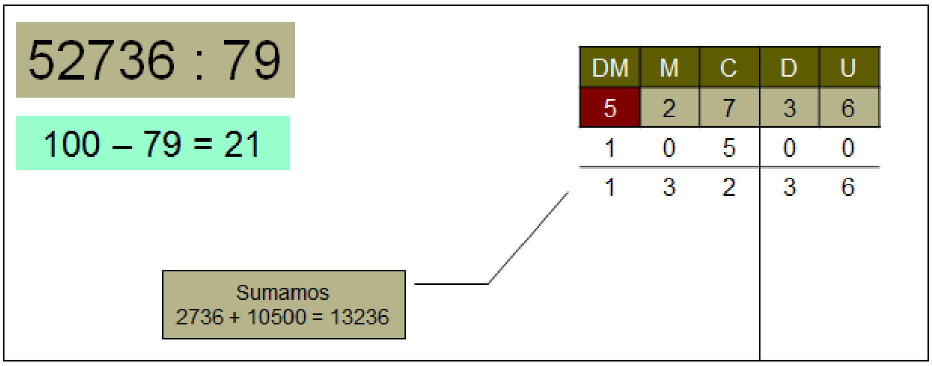

Imagen 6. División por diferencias (2)

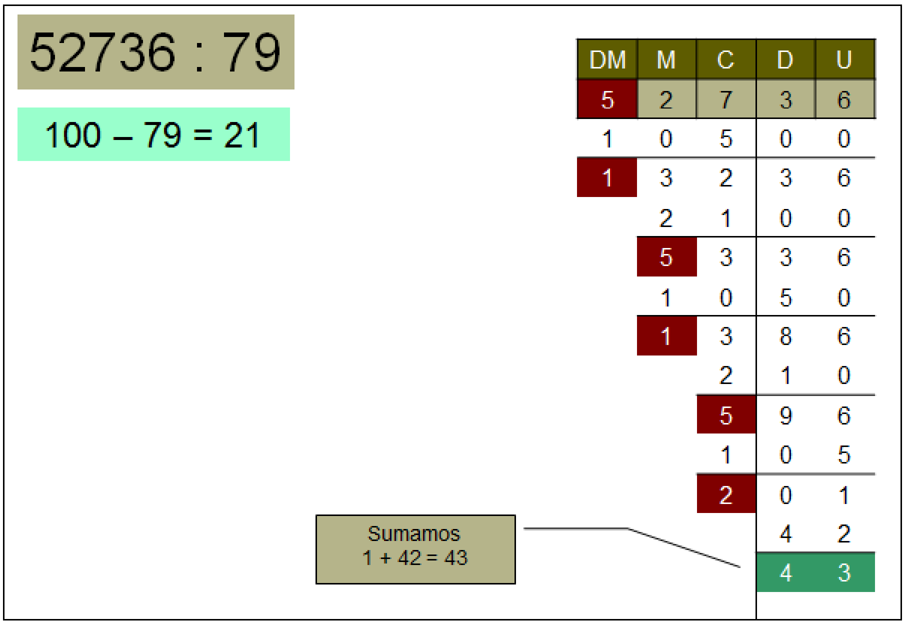

Imagen 7. División por diferencias (3)

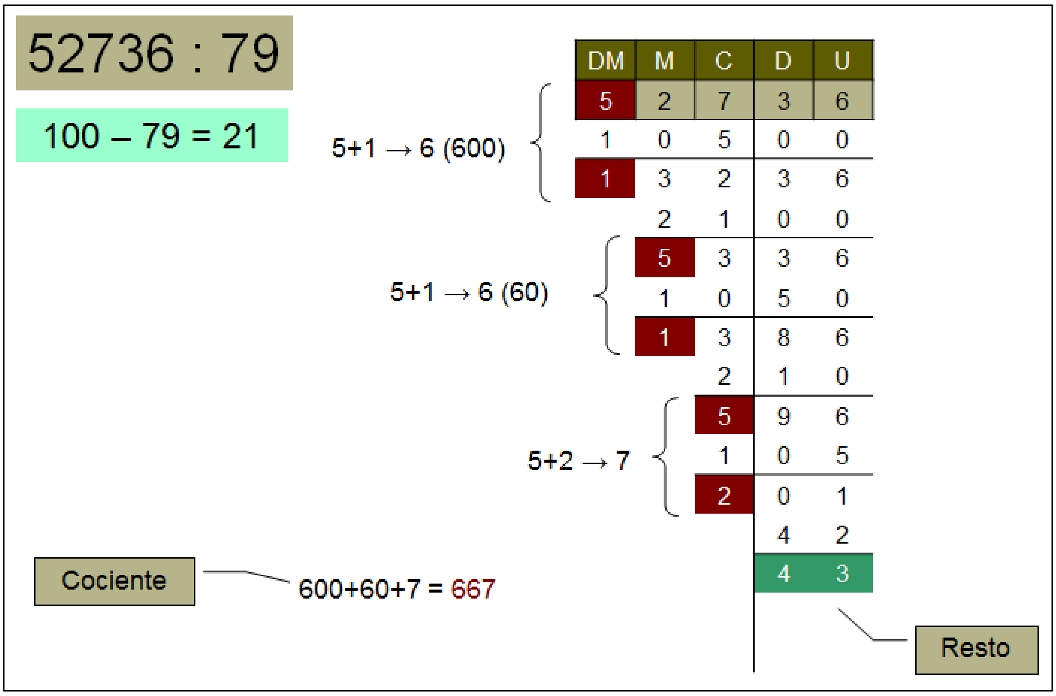

Imagen 8. División por diferencias (4)

¿Puedes aplicar el método a esta división 58412 : 95? ¿Eres capaz de justificar el algoritmo?

El método de Herón para calcular raíces cuadradas

Este algoritmo de la antigua Grecia relaciona perfectamente producto y área del rectángulo con raíz cuadrada y área del cuadrado. Además tiene el valor añadido de ser un algoritmo iterativo, cosa poco frecuente en los algoritmos de cálculo habituales.

Sus ideas básicas son las siguientes:

- La raíz cuadrada de un número es el lado del cuadrado que tiene como área ese mismo número.
- Un cuadrado es un rectángulo "especial" de lados iguales

Veamos cómo encontrar la raíz cuadrada de 254. Para ello "imaginaremos" que el lado del cuadrado es, por ejemplo, 12. Si dividimos 254/12 sabremos el otro lado: 21,16.

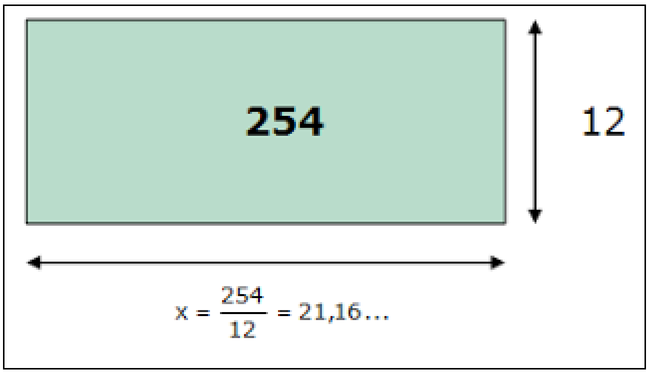

Imagen 9. Algoritmo de Herón (1)

Bien… no es un cuadrado. Es un rectángulo de lados 12 y 21,16. Haremos una nueva prueba pero esta vez no tomaremos un valor al azar sino la media aritmética entre 12 y 21,16, que es 16,58. Y volvemos a probar: 71/16,58 = 13,32.

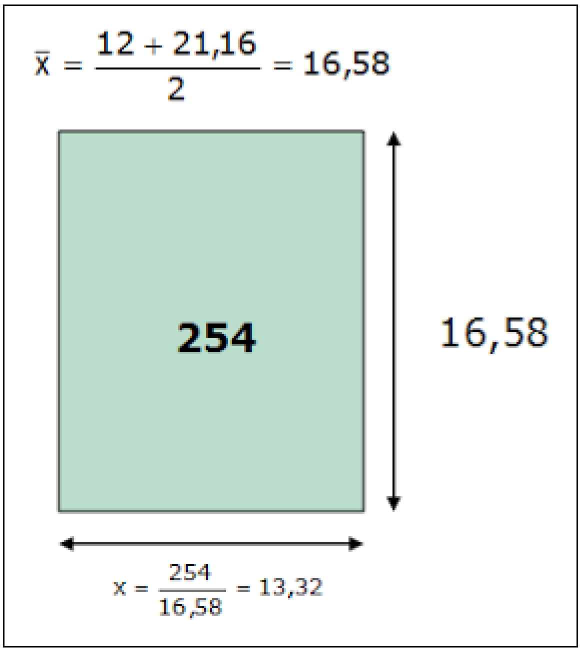

Imagen 10. Algoritmo de Herón (2)

Si comparamos los dos nuevos lados veremos que nuestro nuevo rectángulo es un poco más cuadrado, pero todavía no lo suficiente. Si realizamos dos iteraciones más del paso anterior llegamos a una precisión de un decimal en la igualdad de los dos lados del rectángulo. Será “suficientemente cuadrado”. Si queremos aumentar el grado de precisión sólo tenemos que realizar más iteraciones.

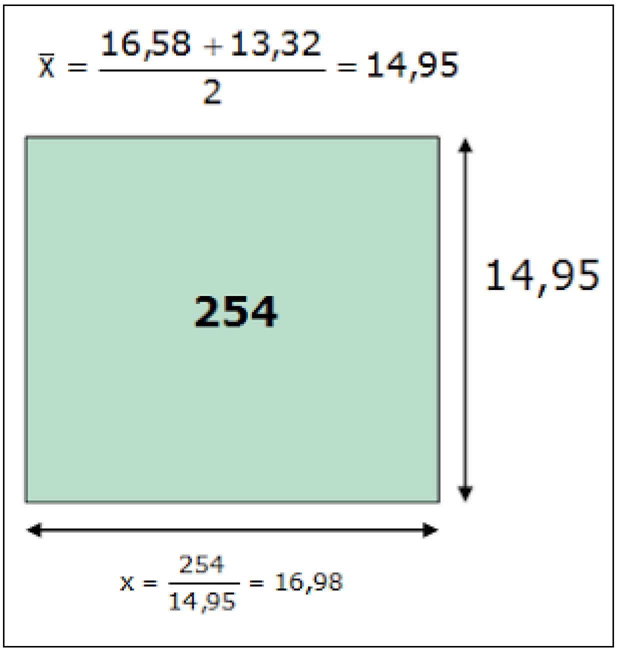

Imagen 11. Algoritmo de Herón (3)

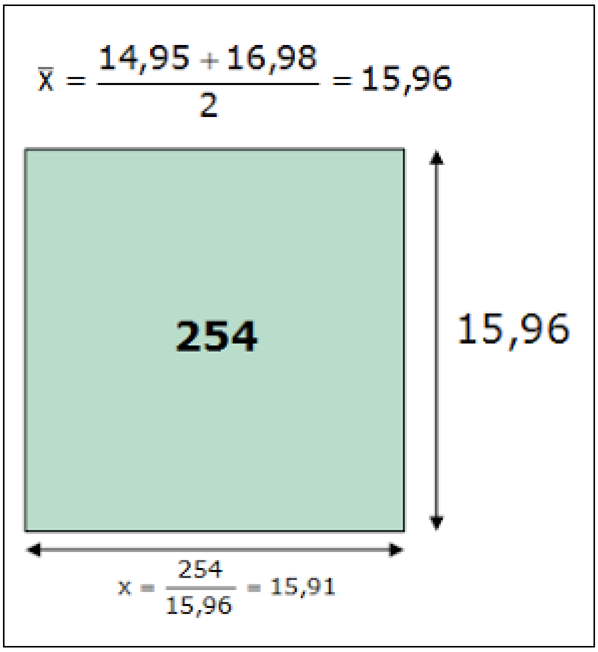

Imagen 12. Algoritmo de Herón (4)

¿De qué depende la cantidad de iteraciones que tendremos que hacer? ¿Qué podemos hacer para acortar el proceso? ¿Podemos preparar una hoja de cálculo o un pequeño programa que extraiga la raíz cuadrada con el método de Herón?

Calcular raíces cuadradas restando impares

Es bien conocida la propiedad de que un número cuadrado se puede obtener de la suma de sucesivos números impares:

$$25 = 5^2 = 1+3+5+7+9 \text{ (5 impares)}$$

$$81 = 9^2 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17 \text{ (9 impares)}$$

Esta propiedad se puede utilizar para obtener raíces aproximadas enteras invirtiendo el proceso: restando sucesivos impares y contando cuántos impares se han restado.

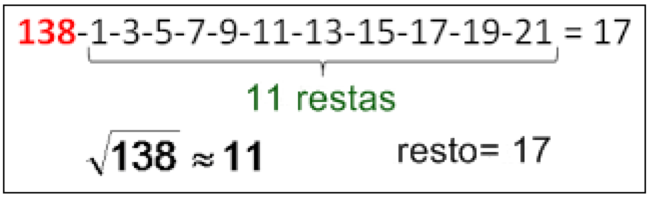

Imagen 13. Raíz cuadrada restando impares

En un libro de texto de 1899 escrito por Camil Vives encontramos una extensión de este método para números más grandes. Mostramos tres momentos del algoritmo para calcular la raíz cuadrada de 55 356:

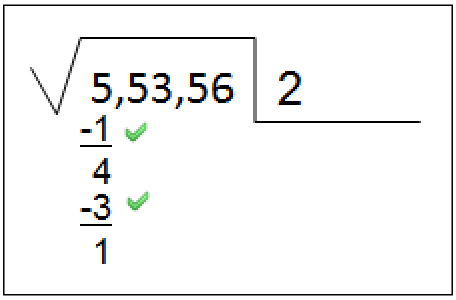

Imagen 14. Algoritmo de Vives (1)

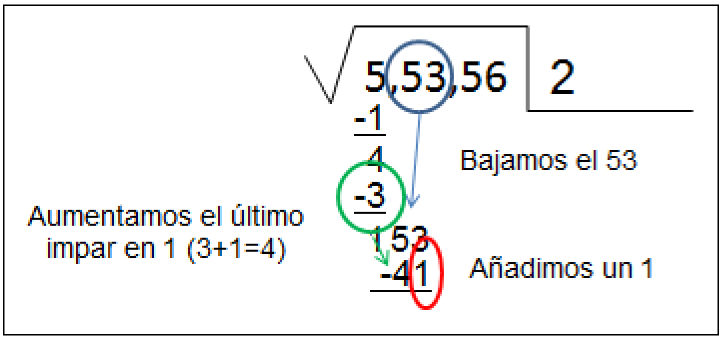

Imagen 15. Algoritmo de Vives (2)

Realizando estos pasos sucesivamente podemos completar el cálculo de la raíz cuadrada.

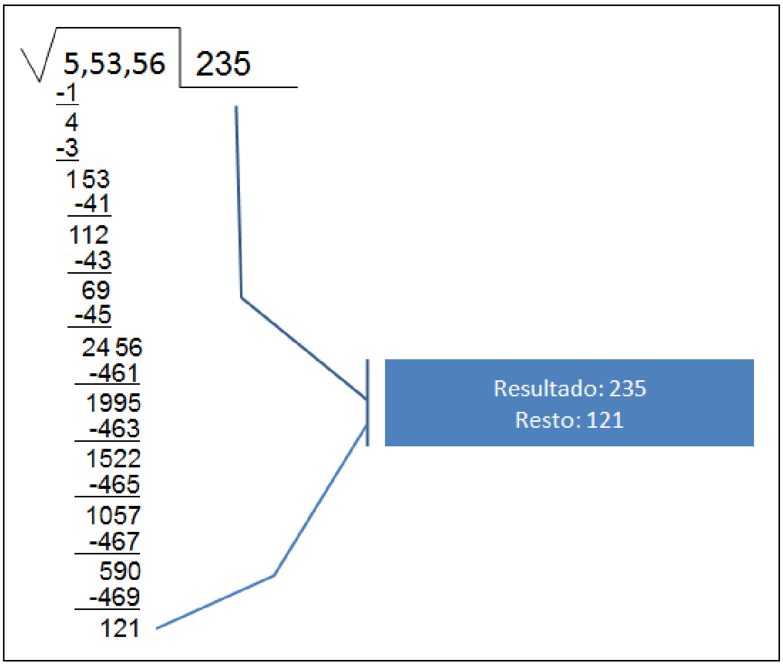

Imagen 16. Algoritmo de Vives (3)

Podemos intentar reproducir el algoritmo de Vives con otros números. También podemos intentar justificar algebraicamente el “paso misterioso” de la imagen 10: aumentar en una unidad el último impar y añadir un uno al final.

Organización del taller

Tras una breve introducción se presentan algunos de los algoritmos a trabajar que se podrán escoger libremente. Se proponen tres niveles de trabajo progresivamente más complejos:

- Reproducción del algoritmo a partir de ejemplos explicados
- Descubrimiento del algoritmo a partir de ejemplos sin explicar
- Justificación de los pasos del algoritmo.

Finalmente se realiza una puesta en común y un pequeño debate