Simetrías y combinatoria con azulejos de cartabón

Ángel Requena Fraile
email: angelrequenafraile@gmail.com
IES Enrique Nieto, Melilla – Melilla (jubilado)

RESUMEN

La enseñanza de las simetrías es esencial tanto para entender la estructura interna de la materia como para percibir la belleza y utilidad de las matemáticas. El estudio de la invarianza a los giros o a las reflexiones con material manipulable permite abordar de forma sencilla y amena cuestiones de cierta complejidad. Además lo contempla el currículo.

Los azulejos bicolores divididos diagonalmente, llamados de cartabón por los profesionales, permiten construir hasta doce grupos de los diecisiete del plano. En el taller se utilizarán individualmente los azulejos cerámicos para construir patrones y reconocer los distintos grupos de simetría plana.

Azulejos, Combinatoria, Simetrías,Teselaciones, Grupos, Movimientos.

Simetrías y combinatoria con azulejos de cartabón

En 1734 se escribió un curioso tratado de combinatoria matemática con azulejos bicolores divididos diagonalmente. El libro se titulaba *Nuevo methodo para hacer dibujos hasta lo infinito con unos azulejos divididos diagonalmente de dos colores*, el autor fue el padre Domingo Douiiat de la Orden Nuestra Señora del Carmen [1]. Se trata de un tipo de azulejo muy corriente que es llamado *de cartabón* por los profesionales.

El azulejo bicolor *de cartabón* (Imagen 1) es muy versátil y por ello resulta muy adecuado para estudiar las simetrías del plano. El azulejo individual solo tiene un eje de simetría de reflexión: la diagonal perpendicular a la del cambio de color. En grandes paneles el azulejo permite explorar centros de giro, translaciones, o ejes de simetría y de simetría con deslizamiento.

Con azulejos de cartabón se pueden representar los siete grupos lineales (frisos) y doce de los diecisietes grupos del plano como ya pusieron de manifiesto Ángel Ramírez y Carlos Usón [2]. Solo faltarían los cinco correspondientes a los giros de orden 3 y 6 que podrían construirse con una variante con ángulos de 60º.

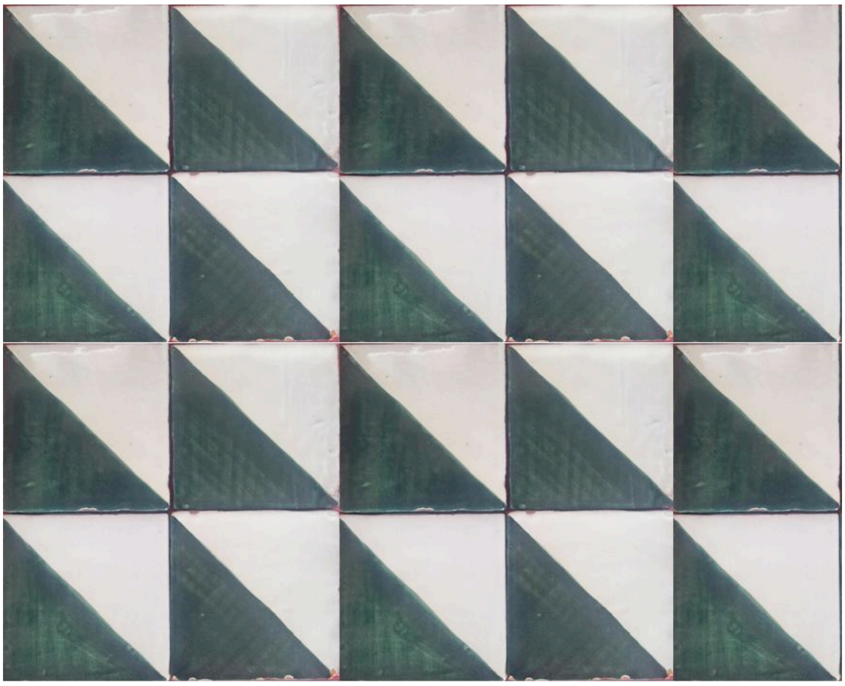

Imagen 1. Panel de azulejos de cartabón

1. Combinatoria con azulejos

El libro del padre Domingo Douiiat [1] es un tratado de combinatoria y una colección de patrones. Cada azulejo admite cuatro posiciones (las cuatro esquinas) lo que hace que el numero de variaciones (VR) posibles crezca exponencialmente con el número de azulejos que usemos.

$$VR = 4^n$$

Trabajando cada alumno con 16 azulejos (en configuración cuadrada 4x4) el número de figuras posibles está próximo a 5000 millones. También a través de los azulejos de cartabón se puede tratar la combinatoria. Cambiando cada segundo un azulejo, sin comer ni dormir, no basta la vida humana para construir las 4^{16} figuras.

Lo que no aborda el carmelita es la forma de elegir las más bella. Espinoso asunto que tenemos que analizar desde la teoría de los grupos de simetría.

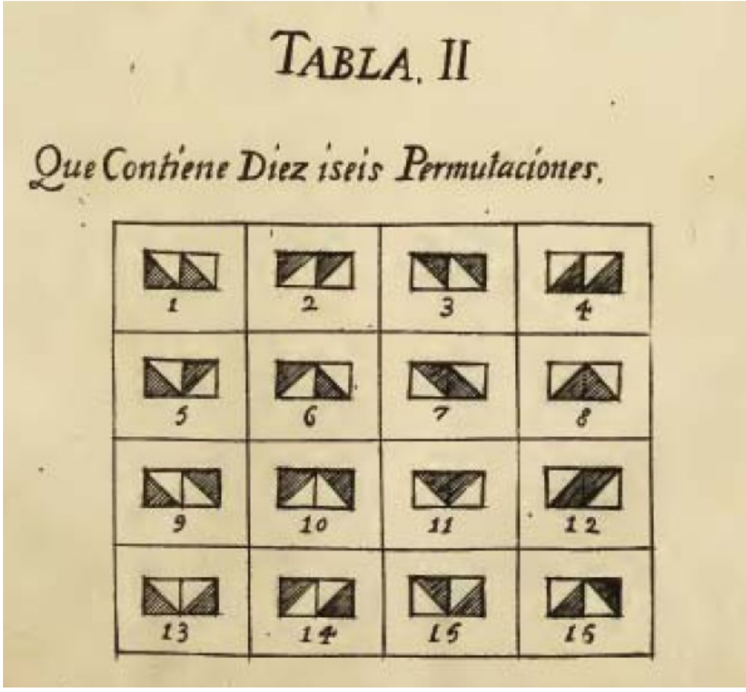

Imagen 2. Combinatoria con dos azulejos

Los diseños anexos al libro suelen ser cuadrados con cuatro ejes de simetría especular y giros de un cuarto de vuelta. Los más grandes son de 24x24. Las variaciones posibles son 2^{1152}, cifra inmensamente superior a la de las Torres de Hanoi o la leyenda del ajedrez. Con razón se habla del infinito.

2. Simetrías a estudiar

Se van a estudiar teselaciones planas periódicas y por ello se buscara la celda base, el paralelogramo que genera por translación todo el mosaico. Después se investigaran los giros, reflexiones y reflexiones deslizantes que dejarán invariante la teselación.

Recocer los centros de giro o rotación, los ejes de simetría de reflexión especular o los ejes deslizantes es una tarea que no requiere muchos conocimientos previos y puede despertar el interés, al mismo tiempo que ofrece una herramienta para ver el mundo con ojos matemáticos.

3. Teselaciones periódicas planas

Hay siete grupos de simetría para frisos y diecisiete para el plano. No se trata tanto de saber nombrarlos sino de reconocer las características que les diferencian haciendo uso de guías o plantillas

Con una plantilla del tipo de la Imagen 3 se comprueban muy bien los distintos grupos. Primero giros invariantes, después ejes de simetría de reflexión, deslizantes, ángulos de ejes y posición de los centros de rotación [3].

<table>
<tr><td rowspan="2">Menor giro</td><td colspan="6">¿reflexiones?</td></tr>
<tr><td colspan="4">si</td><td colspan="2">No</td></tr>
<tr><td>360° / 6</td><td colspan="4">p6m</td><td colspan="2">p6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360° / 4</td><td colspan="4">¿ejes a 45º?</td><td colspan="2" rowspan="2">p4</td></tr>
<tr><td colspan="2">si : p4m</td><td colspan="2">No: p4g</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360° / 3</td><td colspan="4">¿centros de rotación fuera de ejes?</td><td colspan="2" rowspan="2">p3</td></tr>
<tr><td colspan="2">si : p31m</td><td colspan="2">No: p3m1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">360° / 2</td><td colspan="4">¿ejes perpendiculares?</td><td colspan="2" rowspan="2">¿reflexión deslizante?</td></tr>
<tr><td colspan="3">si</td><td>No</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿centro rot. fuera de ejes?</td><td rowspan="2">pmg</td><td rowspan="2">si : pgg</td><td rowspan="2">No: p2</td></tr>
<tr><td>si : cmm</td><td colspan="2">No: pmm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">no</td><td colspan="4">¿reflexión deslizante?</td><td colspan="2">¿reflexión deslizante?</td></tr>
<tr><td colspan="2">si : cm</td><td colspan="2">No: pm</td><td>si : pg</td><td>No: p1</td></tr>
</table>

Imagen 3. Plantilla de identificación

Los paralelogramos base para cada uno los grupos de simetría estudiados son (imágenes 4, 5, 6):

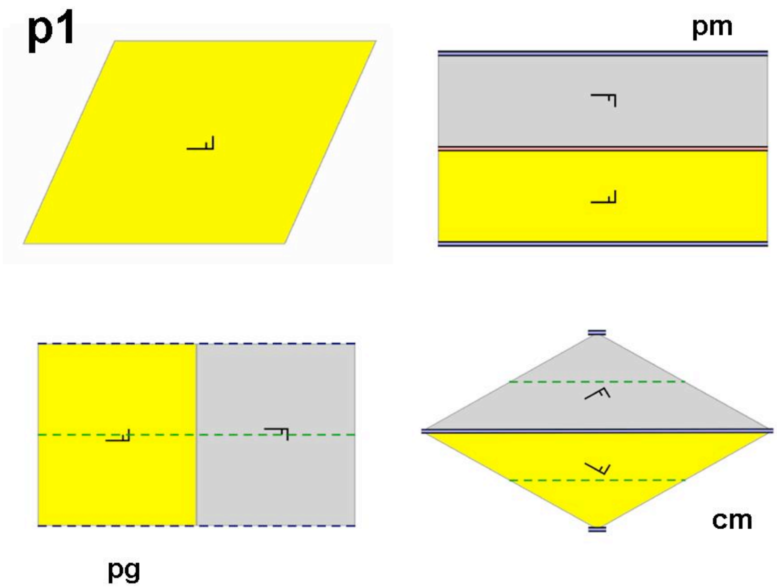

Imagen 4. Celda sin giros

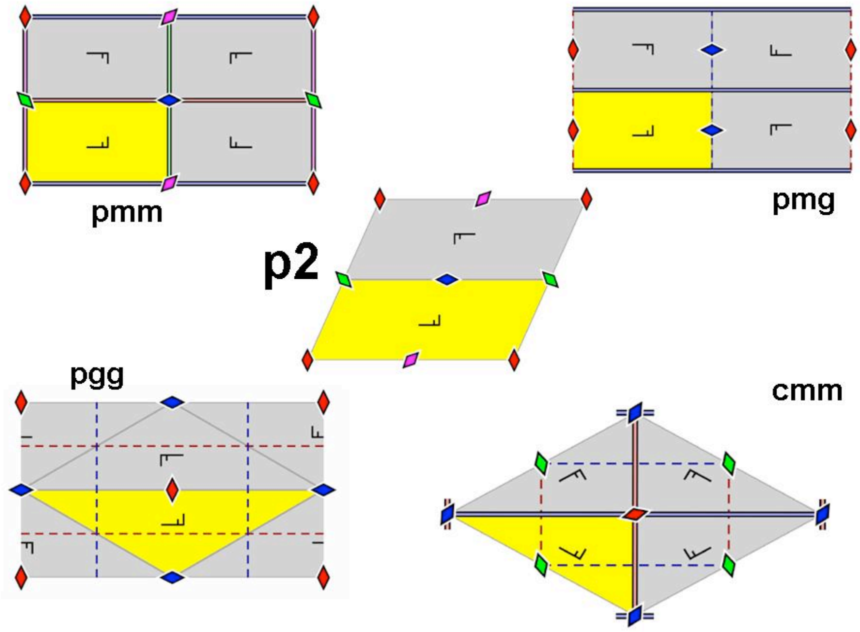

Imagen 5. Celda con giros de media vuelta

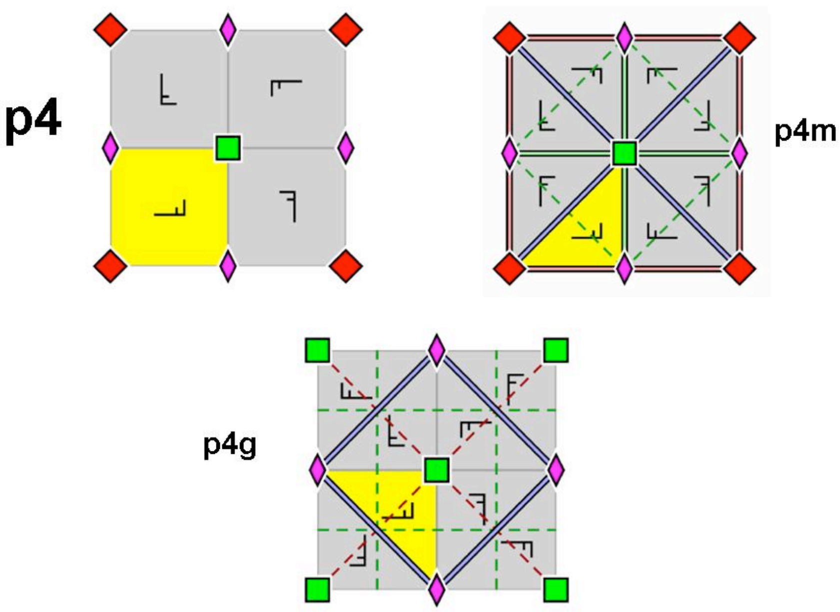

Imagen 6. Celda con giros de cuarto de vuelta

4. Simetrías en los azulejos diagonales

Como taller la actividad es práctica y manipulativa. Se repartirán 16 azulejos de cartabón a cada asistente (ocho si se trabaja en grupo o por superar la asistencia de 15 personas). La práctica se hace o con azulejos de cerámica o con reproducciones de madera de tamaño 7x7 cm^2.

Con los azulejos bicolor se pueden construir los siete frisos lineales o doce de los diecisiete grupos del plano. La celda base del plano solo requieren 4 baldosas en diez de los casos estudiados, un grupo requiere 8 y otro 16 con lo que quedan cubierto. En dos casos los lados son irracionales.

El azulejo en sí mismo tiene un eje de simetría especular en una de sus diagonales. Utilizado como celda base se observa también un eje deslizante. Se trata del **grupo cm.** En la imagen 7 se ve la celda base (amarillo), los ejes de reflexión (azul) y los ejes de reflexión tras deslizamiento (naranja):

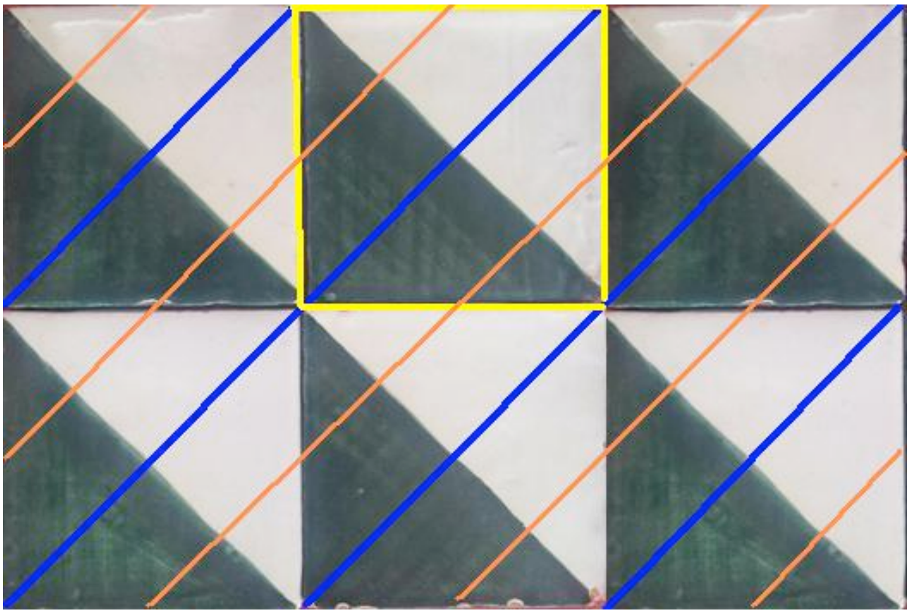

Imagen 7. Grupo cm

De la forma "natural" del azulejo de cartabón que es el grupo cm vamos a pasar por simple rotación de cuartos de vuelta a sus formas más simétricas.

Si giramos el azulejo por una de las esquinas del eje de simetría especular obtenemos el **grupo p4m** (imagen 8).

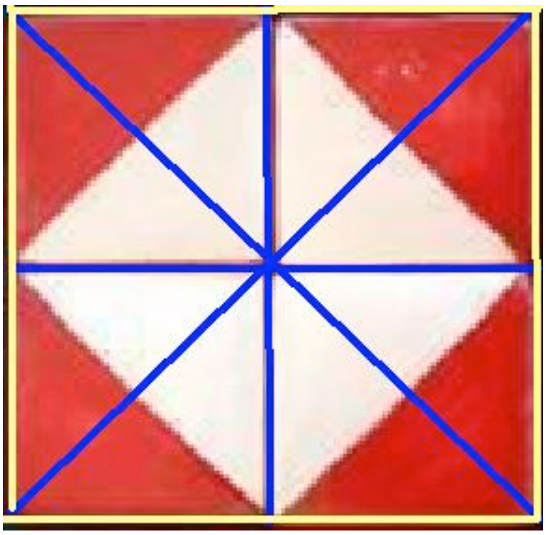

Imagen 8. Grupo p4m

En el caso de girar por un vértice que no pertenezca al eje de reflexión obtenemos el **grupo p4g** (imagen 9)**:**

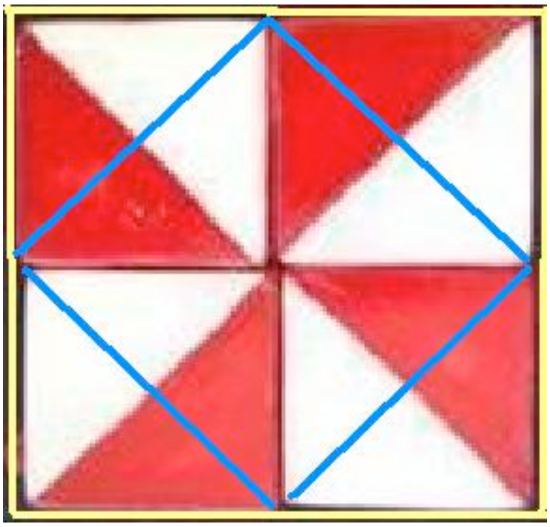

Imagen 9. Grupo p4g

De la misma forma iremos construyendo todos los grupos hasta contemplar los 12 del azulejo cuadrado. Para seguir tenemos que usar los bicolores de rombo de 60 grados.

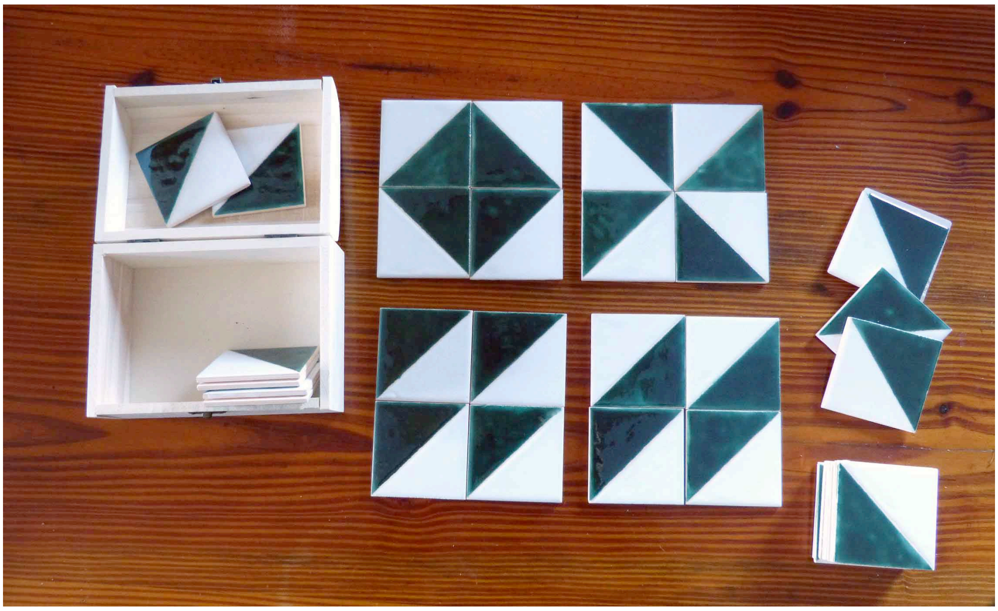

Imagen 10. Material para el taller

5. Referencias

[1] Douiiat, D. (1734): "Nuevo methodo para hacer dibujos hasta lo infinito con unos azulejos divididos diagonalmente de dos colores". Oficina de Antonio Marín. Madrid.

[2] Ramírez, Á.; Usón, C. (2005): "Rutas matemáticas III. El mudéjar". Ayuntamiento de Zaragoza.

[3] VVAA. (2015): "Wallpaper group". Artículo wikipedia (inglés)